This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

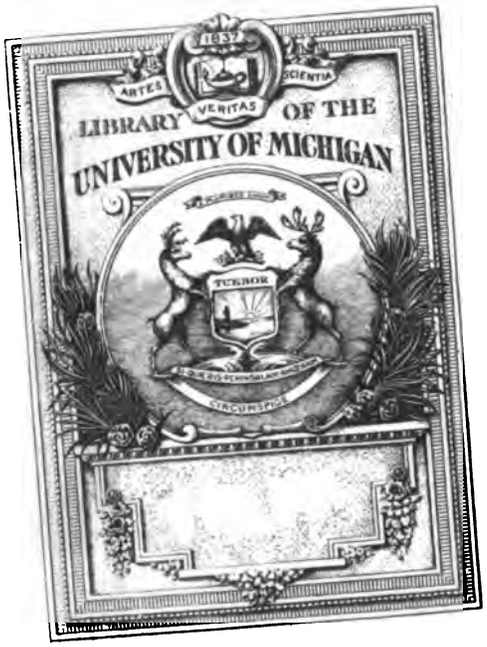
Bremona

BIBLIOTECA RICCARDI
in Modena
S. I F. 9 N. 6.

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

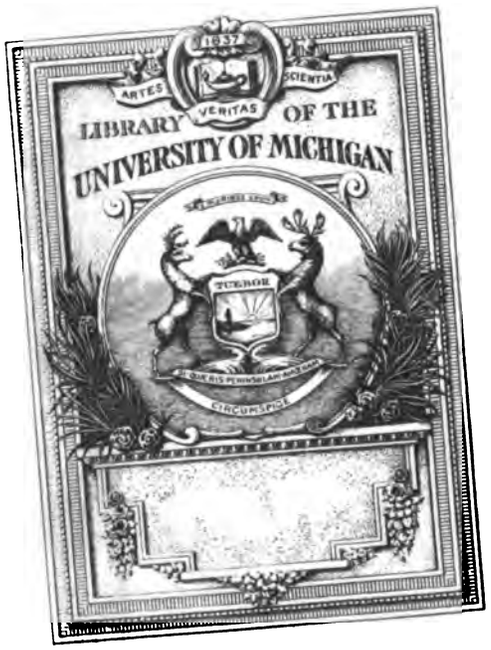
QA
43
.R87

BIBLIOTECA RICCARDI
in Modena
S. I F. 9 N. 6.



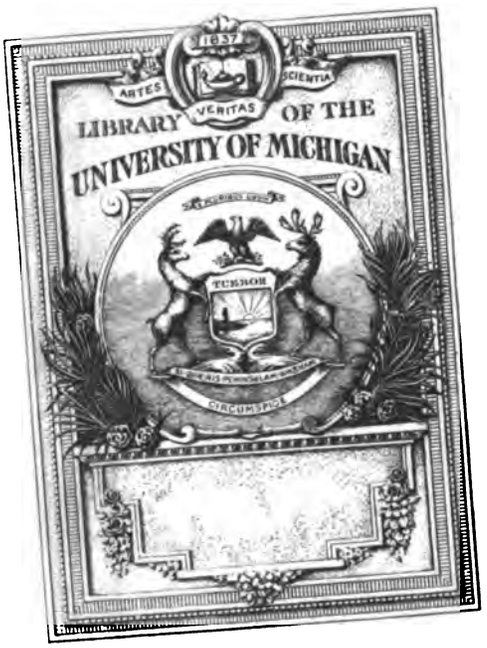
QA
43
.R87

BIBLIOTECA RICCARDI
in Modena
S. I F. 9 N. 6.



QA
43
.R87

BIBLIOTECA RICCARDI
in Modena
S. I F. 9 N. 6.



QA
43
.R87

PROBLEMI D' ALGEBRA

PROBLEMI D' ALGEBRA

E DI

GEOMETRIA ANALITICA

SCIOLTI

DA

CESARE ROVIDA

P. Professore di Matematica, Reggente del C. R. Liceo di P. M.
e Direttore del Collegio Imperiale di Milano

TOMO I.°

Contenente 130 Problemi d'Algebra

MILANO, 1817.

Dai tipi di GIOVANNI BERNARDONI, *Corsìa S. Marcellino*, N.° 1799.

All' amatissimo mio Maestro

l' Abate

Don Bartolommeo Ferrari

già Professore

di Matematica e di Fisica

nelle Pubbliche Scuole Arcimboldi di Milano

Il discepolo, che porge in pubblico dono i frutti del proprio ingegno al suo Maestro, le cui sagge cure lo fecero abile a produrre non dispregevoli cose, compie un affettuoso dovere di gratitudine verso di quello, e procura a se stesso la compiacenza, che sentono gli animi gentili, quando è loro data occasione di manifestarsi riconoscenti. E sebbene io sia stato ben presto chiamato ad essere guida alla gioventù in quella via, per la quale Voi poco prima eravate a me guida ed esempio; pure a volermi tuttora considerare per Vostro discepolo istantemente Vi prego, sì perchè ciò mi serba in certa guisa presenti que' bei giorni, in cui assistito dal Vostro sapere e dal Vostro amore mi spingea fervidamente ne' maestosi recessi delle Scienze Matematiche e Fisiche, e tanto diletto ne ritraeva; e perchè

pur mi onora e m' incoraggisce non poco la sicurezza, che da ciò ricevo, della continuata affezione ed assistenza di Maestro tanto reputato per egregie produzioni non meno, che per molti anni di pubblico insegnamento.

Coll' opera, che a Voi intitolo, è mio scopo soltanto di offrire alla studiosa gioventù un lavoro, che allettando la sua dotta curiosità la introduca nelle più astruse dottrine algebriche, e la invogli di penetrare nel più recondito ed elevato della Scienza. Io ho fatto ogni sforzo per essere esatto e chiaro nei raziocinii, da' quali emergono le equazioni; rigoroso e conciso nelle operazioni, che le sciolgono; uniforme e costante nel metodo, cui ho assoggettato tanto i problemi tolti da' Classici, quanto quelli da me immaginati: ed ho procurato, che non fosse del

tutto senza eleganza la materiale disposizione istessa della stampa, persuaso essere questa, molto più che non credesi, conducente al buon esito de' nostri studi. Talvolta ho dovuto estendere il giro delle operazioni intermedie per ottenere maggiore chiarezza, e per esprimermi più facilmente: Voi però non apporrete questo a difetto dell' opera, ricordando ch' essa è scritta solo per l' istruzione e per l' esercizio de' giovani. Spero poi, che possa meritarsi la Vostra approvazione il divisamento propostomi di dar campo agli studiosi di addestrarsi nel calcolo, segnando ad essi le tracce per ordinare e condurre le operazioni intermedie da me tralasciate per questo oggetto.

Se un esito conforme a' miei voti sia per coronare questa primizia del mio ingegno, lo potrò un giorno raccogliere dal

profitto, che congiunto al diletto ne ritrarranno forse gli alunni delle Matematiche discipline: ma quasi promessa e pegno di ciò mi sarà intanto l'aggradimento cortese, con che Voi accetterete, io spero, questo tributo della mia riconoscenza, del mio amore e della mia stima.

Milano il giorno 30 Aprile 1817.

Il Vostro Discepolo
CESARE ROVIDA

Lit. Com.
Magione
3-1-28
16615.

ALGEBRA

PROBLEMI DI PRIMO GRADO AD UNA SOLA INCOGNITA

Problema I.

Un Generale ha un dato numero di cannoni da disporre a p ordini in una breccia. Se li mette alla distanza l'uno dall'altro di palmi a, gliene sopravanzano m; se li pone alla distanza di palmi b, gliene mancano n. Quanti palmi è lunga la breccia, e quanti cannoni ha il Generale alla sua disposizione.

Raziocinio per l'Equazione

Sia lunga la breccia palmi x. Ordini p di essa daranno una estensione px, la quale, com'è evidente, divisa per la distanza tra un pezzo, e l'altro darà il numero de' cannoni impiegati nella 1.ª disposizione, e che si dovrebbero impiegare nella 2.ª Questo numero per la 1.ª sarà pertanto $\frac{px}{a}$, e per la 2.ª $\frac{px}{b}$. Ma nella 1.ª il Generale aveva cannoni m di più. Dunque il totale de' cannoni sarà $\frac{px}{a} + m$. Nella 2.ª aveane di meno n. Dunque il totale de' cannoni potrà essere pure rappresentato da $\frac{px}{b} - n$. Paragonando queste due espressioni avremo la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{px}{a} + m = \frac{px}{b} - n$$

Soluzione

1.° Sottraggasi $\frac{px}{b}$, ed m. 2.° Si cangino i segni all'equazione, e si moltiplichi per ab. 3.° Sciolti ambedue i membri ne' loro fat-

tori si divida per $ap - bp$, ossia per $p(a-b)$, e si avrà

$$x = \frac{ab\ (m+n)}{p\ (a-b)}$$

Conclusione

Dunque la breccia sarà lunga palmi $\frac{ab\ (m+n)}{p\ (a-b)}$

E il numero totale de' cannoni, che ha il Generale alla sua disposizione sarà

$$\frac{pab\ (m+n)}{ap\ (a-b)} + m = \frac{b\ (m+n)}{a-b} + m = \frac{bm + bn + am - bm}{a-b} = \frac{am+bn}{a-b} = \varphi$$

Verificazione

Per verificare la soluzione si vegga, se la stessa formola pel totale de' cannoni emerge assumendo l'espressione della 2.ª disposizione. Avremo infatti

$$\frac{pab\ (m+n)}{pb\ (a-b)} - n = \frac{a\ (m+n)}{a-b} - n = \frac{am + an - an + bn}{a-b} = \frac{am+bn}{a-b} = \varphi$$

Applicazione

Suppongasi, che il Generale abbia a disporre i cannoni a tre ordini, e che nella 1.ª disposizione, ponendoli alla distanza di otto palmi, gliene sopravanzino sei; mentre nella 2.ª, ponendoli alla distanza di sette, gliene manchino ventiquattro. Si avrebbe

$$p = 3\ ;\ a = 8\ ;\ m = 6\ ;\ b = 7\ ;\ n = 24$$

Dunque $x = \frac{8 \cdot 7\ (6+24)}{3\ (8-7)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 30}{3 \cdot 1} = \frac{1680}{3} = 560$

Conclusione

Dunque la breccia era lunga palmi 560, ossia metri 56

Ed il numero de' cannoni sarà stato

$$\frac{px}{a} + m = \frac{3 \cdot 560}{8} + 6 = \frac{1680}{8} + 6 = 210 + 6 = 216$$

Verificazione

Si debbe ottenere, se la soluzione è esatta, lo stesso numero 216 pel totale dei cannoni presa l'espressione generale, che si ha dalla 2.ª disposizione. Ed è infatti

$$\frac{px}{b} - n = \frac{3.560}{7} - 24 = \frac{1680}{7} - 24 = 240 - 24 = 216$$

Problema II.

Un Banchiere ha due specie di monete. Abbisognano pezzi a della 1.ª per formare uno scudo, e pezzi m della 2.ª per formare similmente uno scudo. Una persona vuole d'ambedue le monete pezzi c per formar pure uno scudo. Si domanda quanti pezzi gli darà il Banchiere di ciascuna delle due monete.

Raziocinio per l'Equazione

Suppongasi, che dia pezzi x della 1.ª moneta; daranne $c - x$ della 2.ª Ora se pezzi a della 1.ª formano uno scudo, qual parte di esso faranno invece pezzi x della moneta istessa? Egli è chiaro, che l'espressione cercata sarà il quarto termine della proporzione $a : 1 :: x : 4^{to} = \frac{x}{a}$. Lo stesso dicasi per rispetto ai pezzi della 2.ª moneta, i quali faranno $\frac{c-x}{m}$ d'uno scudo. Ma queste due quantità debbono formare uno scudo. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{x}{a} + \frac{c-x}{m} = 1$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per am. 2.° Si sottragga ac. 3.° Si sciolgano i due membri nei loro fattori. 4.° Si divida per $m - a$, e si avrà

$$x = \frac{a(m-c)}{m-a}$$

Conclusione

Dunque il Banchiere darà della 1.ª moneta pezzi $\frac{a(m-c)}{m-a}$
E della 2.ª ne darà

$$c-x=c-\frac{a(m-c)}{m-a}=\frac{cm-ac-am+ac}{m-a}=\frac{cm-am}{m-a}=m\left(\frac{c-a}{m-a}\right)$$

Verificazione

Si veda se i valori delle due quantità di pezzi delle monete formino uno, come debb'essere per condizione del problema. Si avrà infatti

Valore dei pezzi della 1.ª $\frac{x}{a}=\frac{a}{a}\left(\frac{m-c}{m-a}\right)=\frac{m-c}{m-a}$

Valore dei pezzi della 2.ª $\frac{c-x}{m}=\frac{m}{m}\left(\frac{m-c}{m-a}\right)=\frac{c-a}{m-a}$

E sommando i due valori

$$\frac{m-c+c-a}{m-a}=\frac{m-a}{m-a}=1$$

Applicazione

Suppongasi, che sei pezzi della prima moneta facciano uno scudo, e che pezzi ventiquattro della 2.ª formino parimente uno scudo. Si vogliano in tutto pezzi quattordici tra l'una e l'altra specie per avere uno scudo. Avremo

$$a=6\,;\ m=24\,;\ c=14$$

Dunque $x=6\left(\frac{24-14}{24-6}\right)=\frac{6.10}{18}=\frac{60}{18}=3\frac{1}{3}$

Conclusione

Dunque il Banchiere darà della 1.ª moneta pezzi $3\frac{1}{3}$

E della 2.ª pezzi $c-x=14-3\frac{1}{3}=10\frac{2}{3}$

Verificazione

Valore dei pezzi della 1.ª $\frac{x}{a}=\frac{3\frac{1}{3}}{6}=\frac{10}{3.6}$

Valore dei pezzi della 2.ª $\frac{c-x}{m} = \frac{10\frac{2}{3}}{24} = \frac{32}{3.24}$

E sommando sarà

$$\frac{10}{3.6} + \frac{32}{3.24} = \frac{40+32}{3.24} = \frac{72}{72} = 1$$

Problema III.

Due viaggiatori si mettono in cammino; il 1.° con lire a, ed il 2.° con lire b. I ladri rubano al 1.° m volte quello, che rubano al 2.°, e allo stesso lasciano n volte quello, che lasciano al 2.° Quante lire hanno rubate a ciascheduno.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero delle lire rubate al 2.° Sarà mx quello delle lire tolte al 1.° Al 2.° saranno rimaste lire $b-x$, ed al 1.° $a-mx$. Ma il numero delle lire lasciate al 1.° debb'essere n^{plo} di quello delle lire lasciate al 2.° Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$a - mx = n\,(b-x)$$

Soluzione

1.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 2.° Si aggiunga nx, e si sottragga a. 3.° Sciolta la x ne' suoi fattori si divida per $n-m$, e si avrà

$$x = \frac{nb-a}{n-m}$$

Conclusione

Dunque i ladri hanno rubate al 2.° lire $\frac{nb-a}{n-m}$

Ed al 1.° lire $m\left(\frac{nb-a}{n-m}\right)$

Verificazione

Il denaro residuo al 1.° viaggiatore sarà

$$a - m\left(\frac{nb-a}{n-m}\right) = \frac{an-am-mnb+am}{n-m} = \frac{an-mnb}{n-m} = n\left(\frac{a-mb}{n-m}\right)$$

Il denaro residuo al 2.° sarà

$$b - \left(\frac{nb-a}{n-m}\right) = \frac{bn-mb-nb+a}{n-m} = \frac{a-mb}{n-m}$$

Dove si verifica, che il residuo del 1.° è n volte quello del 2.°

Applicazione

Supposto, che il 1.° viaggiatore avesse lire cento, e quarantotto il 2.°; che i ladri rubassero al 1.° il doppio di quello, che avessero rubato al 2.°, e lasciassero al 1.° il triplo di quello, che avessero lasciato al 2.°, si avrebbe

$$a = 100 \; ; \; b = 48 \; ; \; m = 2 \; ; \; n = 3$$

Dunque $x = \frac{3 \,.\, 48 - 100}{3-2} = \frac{144-100}{1} = 44$

Conclusione

Dunque i ladri al 2.° viaggiatore hanno rubate *lir.* 44.
Ed al 1.° il doppio, cioè *lir.* 88.

Verificazione

Residuo del 1.° . . . . . 100 − 88 = 12
Residuo del 2.° . . . . . 48 − 44 = 4

Dove si trova essere il residuo del 1.° triplo del residuo del 2.°

Problema IV.

Due soldati in un saccheggio si accordano di dividersi fra se il bottino, che si farebbe, nella ragione di $m : n$. Nel bottino raccolsero scudi a. Ma nella divisione si muove lite, e ciascuno prende quello, che può. Pacificatisi in seguito quegli, che tolse di più, restituì la parte p^{esima}. di quanto avea tolto, e l'altro restituì la parte q^{esima}. ; e si divisero la somma deposta nella ragione di $m : n$. Così ebbero le loro parti, come avevano pattuito. Si vuol sapere quanti scudi avesse preso ciascun soldato nella zuffa.

Raziocinio per l'Equazione

Chiamati x gli scudi presi dal 1.°, quelli presi dal 2.° saranno $a-x$. Il 1.° depose $\frac{x}{p}$, ed il 2.° $\frac{a-x}{q}$. Dunque al 1.° restò $x - \frac{x}{p} = \frac{px-x}{p} = \frac{x}{p}(p-1)$;

ed al 2.° $a - x - \left(\frac{a-x}{q}\right) = \frac{qa - qx - a + x}{q} = \frac{(q-1)(a-x)}{q}$

Questi residui stanno fra loro nella ragione di $m : n$ per le condizioni del problema, e come sarà bene di dimostrare per maggiore esattezza col seguente processo d'operazioni. Facciasi per brevità il residuo del 1.° $\frac{x}{p}(p-1) = r$; quello del 2.° $\frac{(q-1)(a-x)}{q} = s$; e sia la somma degli scudi deposti $\frac{x}{p} + \frac{a-x}{q} = R$. Bisognerà dividere R in due parti, che stiano fra loro $:: m : n$. A tale effetto supposta φ una di esse parti si avrà la proporzione

$$\varphi : R - \varphi :: m : n$$

Da questa, fatto il prodotto degli estremi, e de' medj, si ottiene $\varphi = \frac{mR}{m+n}$

L'altra parte sarà $R - \frac{mR}{m+n} = \frac{mR + nR - mR}{m+n} = \frac{nR}{m+n}$

Trovate queste due parti si aggiunga la 1.ª ad r, e la seconda ad s, e si avranno le parti dei due soldati.

Sarà pel 1.° $r + \frac{mR}{m+n}$; pel 2.° $s + \frac{nR}{m+n}$

onde avrassi quest'altra analogia

$$r + \frac{mR}{m+n} : s + \frac{nR}{m+n} :: m : n$$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj, e sottratta la quantità comune $\frac{nmR}{m+n}$ si otterrà

$$nr = ms \qquad (\pi)$$

la quale equazione posta in proporzione ci dà $r : s :: m : n$, come dovevamo trovare. Sostituendo finalmente nell'equazione (π) i valori assunti per s ed r si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$nx\left(\frac{p-1}{p}\right) = m\left\{\frac{(q-1)(a-x)}{q}\right\}$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per pq. 2.° Si eseguiscano le accennate moltiplicche. 3.° Si aggiunga $mpqx$. 4.° Si sottragga mpx. 5.° Sciolti i due

membri ne' loro fattori si divida per $mp\,(q-1)+nq\,(p-1)$ e si avrà

$$x=\frac{amp\,(q-1)}{mp\,(q-1)+nq\,(p-1)}$$

Conclusione

Dunque il 1.° soldato nella zuffa prese scudi $\frac{amp\,(q-1)}{mp\,(q-1)+nq\,(p-1)}$

Ed il 2.° ne prese

$$a-\frac{amp\,(q-1)}{mp(q-1)+nq(p-1)}=\frac{ampq-amp+anqp-anq-ampq+amp}{mp\,(q-1)+nq\,(p-1)}=\frac{anq\,(p-1)}{mp(q-1)+nq(p-1)}$$

Verificazione

Per provare l'esattezza della soluzione nella quantità $\frac{x}{p}\,(p-1)$ si sostituisca il valore trovato per la x, e si avrà

$$\frac{(p-1)\,(q-1)\,amp}{mp^2\,(q-1)+nqp\,(p-1)},\ \text{ossia}\ \frac{(p-1)\,(q-1)\,am}{mp\,(q-1)+nq\,(p-1)}\qquad(\lambda)$$

Sostituiscasi pure nella quantità $\frac{(q-1)\,(a-x)}{q}$, e si avrà

$$\frac{(q-1)\,(p-1)\,anq}{mpq\,(q-1)+nq^2\,(p-1)},\ \text{ossia}\ \frac{(q-1)\,(p-1)\,an}{mp\,(q-1)+nq\,(p-1)}\qquad(\lambda')$$

Le due quantità (λ), e (λ') debbono stare fra loro nella ragione di $m:n$. E si ha infatti

$$\frac{(p-1)\,(q-1)\,am}{mp(q-1)+nq(p-1)}:\frac{(q-1)\,(p-1)\,an}{mp\,(q-1)+nq\,(p-1)}::(p-1)\,(q-1)\,am:(p-1)\,(q-1)\,an::am:an::m:n$$

Applicazione

Si supponga il bottino di scudi centosessanta, e i soldati si debbano dividere tra loro egualmente questa somma. Il 1.° deponga la metà di quello, che ha preso nella zuffa, ed il 2.° un quarto, e queste parti deposte vengano esse pure divise per metà. Avrassi

$$a=160\ ;\ m=n\ ;\ p=2\ ;\ q=4$$

In questo caso per essere $m=n$ la formola trovata per x si potrà ridurre, e sarà

$$x=\frac{amp\,(q-1)}{m\left(p\,(q-1)+q\,(p-1)\right)}=\frac{ap\,(q-1)}{p\,(q-1)+q\,(p-1)}$$

E conseguentemente $x = \frac{160 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 + 4 \cdot 1} = \frac{960}{10} = 96$

Conclusione

Dunque il 1.° soldato nella zuffa avea presi scudi 96
Ed il 2.° ne avea presi $160 - 96 = 64$

Verificazione

Il 1.° restituì $\frac{96}{2} = 48$. Dunque gli restarono scudi $96 - 48 = 48$.

Il 2.° restituì $\frac{64}{4} = 16$. Dunque gli restarono scudi $64 - 16 = 48$.

La ragione, che passa tra i due residui debb'essere, nel nostro caso, quella dell' eguaglianza: quindi ciascuno avrà percepito la metà di $48 + 16 = 64$, cioè scudi 32, che uniti all' eguale residuo di scudi 48 daranno per ambedue scudi 80, ch' è la metà del bottino indicato nell'applicazione.

Problema V.

B cacciatore promette a C una somma b per ogni scarica a vuoto, e C promette a B una somma a per ogni scarica in pieno. Dopo un numero n di scariche i due cacciatori o si debbono niente, o B deve a C una somma d, o C la deve a B. Trovare la formola generale esprimente le scariche a vuoto del cacciatore B.

Raziocinio per l' Equazione

Chiaminsi x queste scariche a vuoto. Rappresentate per n tutte le scariche, egli è chiaro, che $n - x$ sarà l' espressione delle scariche in pieno. Dunque B per queste guadagnerà $a\,(n - x)$. Ma con questo guadagno deve scontare le scariche a vuoto, che importano una perdita bx. Dunque B riceverà soltanto $a\,(n - x) - bx$. Questa quantità si chiami (φ), e per condizione del problema dovrà essere eguale a d. Ora se le quantità positive uguaglieranno le negative sarà $d = (\varphi) = o$, e in questo caso i due cacciatori nulla si dovranno. Se saranno minori, riescirà $-d = (\varphi)$, e C dovrà a B una somma d. Se maggiori, sarà $d = (\varphi)$, e B dovrà d a C. Avrassi pertanto la seguente

Equazione del Problema

$$a\,(n - x) - bx = \mp d$$

nella quale può essere anche $d = o$

Soluzione

1.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 2.° Si aggiunga $\mp d$. 3.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 4.° Si aggiunga $x(a+b)$. 5.° Si divida per $a+b$. 6.° Si ordini per l'incognita, e sarà

$$x = \frac{an \pm d}{a+b}$$

Conclusione

Dunque le scariche a vuoto di B saranno rappresentate dalla formola $\frac{an \pm d}{a+b}$

Verificazione

Le scariche in pieno saranno

$$n - x = n - \left(\frac{an \pm d}{a+b}\right) = \frac{an + bn - an \mp d}{a+b} = \frac{bn \mp d}{a+b}$$

B per le scariche in pieno guadagna . . . . $a\left(\frac{bn \mp d}{a+b}\right)$ (φ')

Perde per le scariche a vuoto . . . . . $b\left(\frac{an \pm d}{a+b}\right)$ (φ'')

1.° Suppongasi, che nulla si debbano i due cacciatori. In questo caso è $d = o$, e le due quantità (φ'), (φ'') esprimenti il guadagno, e la perdita di B sono infatti eguali, per cui zero n'è la differenza, riescendo in questo caso ambedue $\frac{abn}{a+b}$. 2.° Si supponga B perdente, e debba a C la somma d. In questo caso d è positiva nella formola generale trovata per x. Dunque le scariche a vuoto di B sono $\frac{an+d}{a+b}$, e le scariche in pieno sono $n - \left(\frac{an+d}{a+b}\right) = \frac{an+bn-an-d}{a+b} = \frac{bn-d}{a+b}$

Ma per le prime perde $b\left(\frac{an+d}{a+b}\right)$, e per le seconde guadagna $a\left(\frac{bn-d}{a+b}\right)$. Dunque per verificare questo caso bisogna aggiugnere al guadagno la perdita d, e vedere se l'espressione, che n'emerge, riesce eguale alla espressione della perdita. Ed è infatti

$$a\left(\frac{bn-d}{a+b}\right) + d = \frac{abn - ad + ad + bd}{a+b} = \frac{abn + bd}{a+b} = b\left(\frac{an+d}{a+b}\right)$$

3.° Con eguale andamento verificherebbesi il 3.° caso.

Applicazione

Si supponga il totale delle scariche essere venticinque. La somma promessa da C a B sia lire tre, e lire due la promessa da B a C; e la quantità, di cui uno dei due può andar debitore sia lire dieci. Si avrà

$$n = 25;\ a = 3;\ b = 2;\ d = 10$$

Dunque $x = \frac{25 . 3 \pm 10}{3 + 2} = \frac{75 \pm 10}{5}$

Conclusione

Dunque la formola esprimente nel nostro caso particolare le scariche a vuoto del cacciatore B sarà $\frac{75 \pm 10}{5}$, la quale varierà secondo le diverse supposizioni del valore assunto per d, cioè positivo, negativo, o zero; talchè si potranno avere quindici, diciassette, o tredici scariche a vuoto.

Verificazione

1.° Suppongasi, che i cacciatori nulla si debbano. Avrassi $d = o$, e quindi

Scariche a vuoto $x = \frac{75}{5} = 15$

Scariche in pieno $n - x = 25 - 15 = 10$

Dunque il cacciatore B guadagna *lir.* $3 \times 10 = 30$ / perde *lir.* $2 \times 15 = 30$ } Differenza $d = o$

2.° Suppongasi perdente B, sarà d positiva, e quindi

Scariche a vuoto $x = \frac{75 + 10}{5} = \frac{85}{5} = 17$

Scariche in pieno $n - x = 25 - 17 = 8$

Dunque il cacciatore B guadagna *lir.* $3 \times 8 = 24$ / perde *lir.* $2 \times 17 = 34$ } Differenza di perdita $d = 10$

3.° Sia C perdente, e avremo d negativa, e quindi

Scariche a vuoto $x = \frac{75 - 10}{5} = \frac{65}{5} = 13$

Scariche in pieno $n - x = 25 - 13 = 12$

Dunque il cacciatore B guadagna *lir.* $3 \times 12 = 36$ / perde *lir.* $2 \times 13 = 26$ } Differenza di guadagno $d = 10$

Problema VI.

Con carte numero a si fanno monticelli b di egual numero c di punti, e la prima carta di ciascun monticello in prospetto vale dieci, s'è figura, undici s'è un asso, dodici s'è un due, e così di seguito. Le altre carte al disotto non vagliono, che un punto ciascuna. Fatti i monticelli, e rese le carte, che sopravanzano, se ve ne sono, chiedesi la formola generale esprimente la somma de' punti, che fanno le carte in prospetto.

Raziocinio per l'Equazione

Ciascun monticello contiene un numero di carte eguale a punti c, diminuito di tante carte, quanti sono i punti della carta in prospetto, meno uno, cioè meno la carta istessa di prospetto. Ciò posto: supponendo per facilitazione di calcolo essere y i punti in prospetto d'una carta, y' quelli di un'altra, y'' quei della 3.ª, e così successivamente, le carte contenute nel 1.° monticello saranno $c-(y-1)$, quelle contenute nel 2.° $c-(y'-1)$, e così di seguito, ch'è poi lo stesso, che dire, saranno

$$c+1-y;\ c+1-y';\ c+1-y''\ \ldots.$$

La somma di queste quantità ci darà la somma delle carte impiegate, e sarà

$$c+1-y+c+1-y'+c+1-y''\ \ldots..$$

Questa somma, fatto b il numero de' monticelli, conterrà tante volte il fattore $c+1$ quante unità si contengono in b, e l'ultima y avrà per accento $b-1$ apici. Dunque questa somma si potrà esprimere così

$$b\,(c+1)-\left(y+y'+y''\ldots.+y^{b-1}\right) \qquad (\varphi)$$

Ora, supposta x la somma di tutti i punti in prospetto, che constituisce la quantità incognita del problema, sarà

$$y+y'+y''\ldots..+y^{b-1}=x$$

e per conseguenza la formola (φ) si muterà in quest'altra

$$b\,(c+1)-x$$

cui aggiugnendo un numero d carte, che possono sopravanzare, e che sarà zero, ove non ne sopravanzino, si avrà la formola

$$b\,(c+1)-x+d$$

esprimente tutto il numero delle carte proposte pel giuoco. Ma queste carte sono a. Dunque avrassi la seguente

Equazione del Problema

$$b\ (c+1) - x + d = a$$

Soluzione

1.° Si aggiunga x. 2.° Si tolga a. 3.° Si ordini l'equazione per la incognita, e si avrà

$$x = b\ (c+1) + d - a$$

Conclusione

Dunque si avranno in prospetto punti $b\ (c+1) + d - a$

Applicazione, e Verificazione

Sieno quaranta le carte proposte pel giuoco. Si facciano quattro monticelli. Ciascuno abbia diciannove punti. Le carte di avanzo sieno nove. Avremo

$$a = 40\ ;\ b = 4\ ;\ c = 19 : d = 9$$

Dunque $x = 4\ (19+1) + 9 - 40 = 4 . 20 + 9 - 40 = 89 - 40 = 49$

I punti in prospetto saranno quarantanove, ed avremo una figura, un asso, un due, ed un sei.

Problema VII.

In un testamento si trovò così scritto: se mi nasce un maschio lo instituisco erede in due terzi, e lascio il resto alla madre: e se mi nasce una femmina la chiamo erede in un terzo, e lascio il resto alla madre. Ora nacquero ad un parto un maschio, ed una femmina. Quanto darassi alla madre, al figlio, ed alla figlia, perchè si adempisca la volontà del testatore.

Raziocinio per l'Equazione

Chiamisi m l'asse paterno, ed x la parte della figlia. Se in un terzo è la figlia erede, e il resto tocca alla madre, toccherà ad essa il doppio della figlia. Dunque $2x$. Se due terzi toccano al figlio, e un

terzo tocca alla madre, il figlio avrà il doppio della madre. Dunque $4x$. Ma queste tre parti prese insieme debbono assorbire l'asse paterno. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$x + 2x + 4x = m$$

Soluzione

1.° Si sommino le x. 2.° Si divida per 7, e si avrà

$$x = \frac{m}{7}$$

Conclusione

Dunque si dovrà dividere l'asse paterno in sette parti eguali. Una di queste darassi alla figlia, due alla madre, e quattro al figlio.

Verificazione

Le tre parti debbono formare m, cioè l'asse paterno. Ed è infatti

$$\frac{m}{7} + \frac{2m}{7} + \frac{4m}{7} = \frac{7m}{7} = m$$

Applicazione e Verificazione

Sia l'asse paterno di lire trentadue mille quattrocento quaranta cinque. Si avrà $m = 32445$

Dunque $x = \frac{32445}{7} = 4635$ . . . . . Parte della figlia.

$2x = 2 . 4635 = 9270$ . . . . . Parte della madre.

$4x = 4 . 4635 = 18540$ . . . . . Parte del figlio.

Somma per verificazione 32445 . . . . . Asse paterno.

Problema VIII.

Un servitore avea lire a, quando ricevette il salario di n mesi. Dopo un numero m di mesi aveva già spesa una parte $\frac{p}{q}$ del suo dena-

ro, e riscosso il salario degli m mesi si trovò con lire b. Si domanda quanto avesse al mese.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il salario ricercato. Quando ebbe il salario di n mesi, compreso il suo denaro a, egli avrà avuto $a+nx$. Ma m mesi dopo avendone spesa la parte $\frac{p}{q}$, gli sarà rimasta soltanto la parte $\frac{q-p}{q}$ del suo denaro, cioè $\frac{(a+nx)(q-p)}{q}$. Riscosso il salario di mesi m avrà avuto $mx+\frac{(a+nx)(q-p)}{q}$. Ma questo denaro debb' essere uguale a lire b. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$mx+\frac{(a+nx)(q-p)}{q}=b$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per q. 2.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 3.° Si sottragga aq. 4.° Si aggiunga ap. 5.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 6.° Si divida pel coefficiente della x, e si avrà

$$x=\frac{ap+q(b-a)}{mq+n(q-p)}$$

Conclusione

Dunque il servitore avrà avuto al mese lire $\frac{ap+q(b-a)}{mq+n(q-p)}$

Verificazione

Il salario di mesi n è $\frac{nbq+nap-naq}{mq+nq-np}$, cui aggiunte lire a, che il servitore aveva, egli avrà avuto in tutto

$$\frac{nbq+nap-naq}{mq+nq-np}+a=\frac{nbq+nap-naq+amq+anq-anp}{mq+nq-np}=\frac{nbq+amq}{mq+nq-np}$$

Presa la parte $\frac{q-p}{q}$ di questa somma per la spesa fatta susseguentemente, si avrà la somma ridotta

$$\frac{(q-p)(bnq+amq)}{q(mq+nq-np)} = \frac{(q-p)(bn+am)}{mq+nq-np} = \frac{bnq+amq-bpn-amp}{mq+nq-np}$$

A questa somma aggiunto il salario di mesi m, cioè $\frac{mbq+map-maq}{mq+nq-np}$

si avrà $\frac{bnq+amq-bpn-amp+mbq+map-maq}{mq+nq-np} = \frac{b(mq+nq-np)}{mq+nq-np} = b$

ch'è la quantità di denaro, che il servitore si trovò d'avere per ultimo.

Applicazione

Si supponga, che il servitore avesse lire sei, quando ricevette il salario di cinque mesi. Due mesi dopo abbia speso tre quarti del suo denaro, e riscosso il salario di questi due mesi, trovisi con lire novantanove. Avremo

$$a=6;\ n=5;\ m=2;\ p=3;\ q=4;\ b=99$$

Dunque $x = \frac{6.3+4(99-6)}{2.4+5(4-3)} = \frac{18+4.93}{8+5.1} = \frac{18+372}{8+5} = \frac{390}{13} = 30$

Conclusione

Dunque il servitore aveva *lir.* 30 al mese.

Verificazione

Il salario di cinque mesi è *lir.* 150, cui aggiunte *lir.* 6, che il servitore aveva, si avranno *lir.* 156. Sottratti tre quarti di questa somma, cioè *lir.* 117, si avrà il resto, ch'è, *lir.* 39; al qual residuo aggiunto il salario di due mesi, cioè *lir.* 60, si avranno precisamente *lir.* 99 come portava il problema.

Problema IX.

Tre amici B, C, D hanno preso in comune de' viglietti di lotto. Il giuoco di B con quello di C fa lire a; quello di B col giuoco di D fa lire c; e quello di C col giuoco dello stesso D fa lire r. Si cercano le formole generali esprimenti il giuoco di ciascheduno.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il denaro giuocato da B. Sarà $a-x$ quello giuocato da C, e $c-x$ quello, che ha giuocato D. Ma i due giuochi di C, e D debbono formare lire r. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$a - x + c - x = r$$

Soluzione

1.° Si sommino le x. 2.° Si aggiungano $2x$. 3.° si sottragga r. 4.° Si ordini per x, e si divida per 2, e si avrà.

$$x = \frac{a + c - r}{2}$$

Conclusione

Sarà dunque il giuoco di B . . . . . $\frac{a + c - r}{2}$

Il giuoco di C . . . $a - x = a - \left(\frac{a + c - r}{2}\right) = \frac{2a - a - c + r}{2} = \frac{a - c + r}{2}$

Il giuoco di D . . . $c - x = c - \left(\frac{a + c - r}{2}\right) = \frac{2c - a - c + r}{2} = \frac{c - a + r}{2}$

Verificazione

I due giuochi di C e D debbono fare lire r. Ed è infatti

$$\frac{a - c + r}{2} + \frac{c - a + r}{2} = \frac{2r}{2} = r$$

Applicazione

Faccia il giuoco di B con D lire ventiquattro; quello di B con C lire ventuno; e quello di C con D lire ventisette. Avrassi

$$a = 21 \; ; \; c = 24 \; ; \; r = 27$$

Dunque il giuoco di B sarà . . . $\frac{21 + 24 - 27}{2} = \frac{45 - 27}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Quello di C . . . . . $\frac{21 - 24 + 27}{2} = \frac{48 - 24}{2} = \frac{24}{2} = 12$

E quello di D . . . . . $\frac{24 - 21 + 27}{2} = \frac{51 - 21}{2} = \frac{30}{2} = 15$

Conclusione

Dunque B avrà giuocato *lir.* 9; C *lir.* 12; e D *lir.* 15.

Verificazione

$$C + D = 12 + 15 = 27 = r$$
$$B + D = 9 + 15 = 24 = c$$
$$B + C = 9 + 12 = 21 = a$$

Problema X.

Un padre lascia morendo ad alcuni figli un asse, che si dividono in questa maniera. Il 1.° riceve lire a, e la $m.^{sima}$ parte del residuo; il 2.° lire $2a$, e la $m.^{sima}$ parte del residuo; il 3.° lire $3a$, e la $m.^{sima}$ parte del residuo, e così di seguito. Fatte queste divisioni si trova, che l'asse è stato egualmente diviso tra' figli. Quanti erano i figli, quanto ricevette ciascuno, ed a quanto ascendeva l'asse paterno.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x l'asse paterno. La parte del 1.° sarà $a + \frac{x-a}{m}$, e levata questa parte rimarrà dell'asse paterno $x - a - \left(\frac{x-a}{m}\right) = \frac{mx - am - x + a}{m} = \frac{(m-1)(x-a)}{m}$

Il 2.° avrà avuto $2a$ più la $m.^{sima}$ parte di $\frac{(m-1)(x-a)}{m} - 2a$, cioè

$$2a + \frac{(m-1)(x-a)}{m^2} - \frac{2a}{m} = \frac{2am^2 + (m-1)(x-a) - 2am}{m^2} = \frac{(m-1)x - 3am + a + 2am^2}{m^2}$$

Ma così dividendo l'eredità si trova, che le parti de' figli sono eguali. Dunque paragonando la parte del 1.° con quella del 2.° si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$a + \frac{x-a}{m} = \frac{(m-1)x - 3am + a + 2am^2}{m^2}$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per m^2. 2.° Si sottragga am^2, e $(m-1)x$. 3.° Si aggiunga am, e si avrà

$$x = a + am^2 - 2am = a(m-1)^2$$

Conclusione

1.° Dunque l'asse paterno sarà rappresentato dalla formola $a\,(m-1)^2$

2.° Per trovare quanto abbia ricevuto ogni figlio si sostituisca nella espressione della parte del 1.° alla x il suo valore qui trovato, e si otterrà

$$a+\frac{x-a}{m}=a+\frac{a(m-1)^2-a}{m}=\frac{am+am^2-2am+a-a}{m}=\frac{am^2-am}{m}=a\,(m-1)=(\varphi)$$

3.° Il numero poi de' figli sarà eguale all'asse paterno per la parte diviso, che tocca a ciascun figlio, e conseguentemente sarà

$$\frac{a\,(m-1)^2}{a\,(m-1)}=\frac{a\,(m-1)\,(m-1)}{a\,(m-1)}=m-1$$

Verificazione

Per verificazione si provi a sostituire alla quantità x il suo valore nell'espressione della parte superiormente trovata pel 2.° figlio, e si vegga se riesce, come debb'essere, identica a quella del 1.° Si avrà

$$\frac{2am^2+(m-1)x-3am+a}{m^2}=\frac{2am^2+a(m-1)^3-3am+a}{m^2}=\frac{2am^2+am^3-3am^2+3am-a-3am+a}{m^2}$$

$$=\frac{am^3-am^2}{m^2}=am-a=a\,(m-1)=(\varphi)$$

Applicazione

Il 1.° figlio abbia lire cento, più la decima parte del resto; il 2.° lire duecento più la decima parte del resto; il 3.° lire trecento più la decima parte del resto, e così di seguito. Si avrà

$$a=100\,;\,m=10$$

Dunque $x=100\,(10-1)^2=100\,.\,9^2=100\,.\,81=8100$

Conclusione

1.° Dunque l'asse paterno era di *lir.* 8100

2.° La parte del 1.° figlio, e d'ogni altro sarà $100\,(10-1)=100\,.\,9=900$

3.° Il numero de' figli sarà $\frac{8100}{900}=\frac{81}{9}=9$

Verificazione

Si prenda la parte di ciascun figlio dall' espressione trovata per quella del 2.°, e si avrà ancora *lir.* 900. Infatti

$$2a+\frac{(m-1)x-3am+a}{m^2}=200+\frac{72900-3000+100}{100}=200+729-30+1=930-30=900$$

Problema XI.

Vi sono due fontane, una delle quali colle sue acque riempie in ore m una data capacità, e l'altra la riempie colle sue separatamente in ore n. Quanto tempo impiegheranno a riempirla riunendo le loro acque.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il tempo cercato. Presa la capacità, di cui si tratta, come una unità qualunque, la prima fontana, ch'essa sola la riempie in ore m, vi verserà in un' ora una quantità d'acqua espressa da $\frac{1}{m}$, ed in un numero x d'ore vi porterà $\frac{x}{m}$ d'acqua. Similmente nello stesso tempo la 2.ª fontana vi porterà $\frac{x}{n}$ d' acqua. Ma queste due quantità debbono essere uguali ad uno, dovendo riempire la capacità, che si è supposta una unità qualunque. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{x}{m}+\frac{x}{n}=1$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per mn. 2.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 3.° Si divida per $m+n$, e si otterrà

$$x=\frac{mn}{m+n}$$

Conclusione

Dunque le due fontane colle loro acque riunite empiranno la data capacità in ore $\frac{mn}{m+n}$

Verificazione

Dividasi il valore qui trovato primamente per m, ed avrassi $\frac{n}{m+n}$, quantità d'acqua versata nella capacità data dalla 1.ª fontana; poi si divida per n, e si otterrà $\frac{m}{m+n}$, quantità d'acqua versatavi dalla 2.ª Sommando queste due quantità si dovrà avere uno. Ed è infatti

$$\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n}=\frac{m+n}{m+n}=1$$

Applicazione

Suppongasi, che la 1.ª fontana empisca da se sola la data capacità in ore due, e mezza; e la 2.ª in ore tre, e tre quarti. Avrassi

$$m=2\tfrac{1}{2}\,;\ n=3\tfrac{3}{4}$$

$$\text{Dunque } x=\frac{\left(2\frac{1}{2}\right)\left(3\frac{3}{4}\right)}{2\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}}=\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{15}{4}}{6\frac{1}{4}}=\frac{\frac{75}{8}}{\frac{25}{4}}=\frac{75\cdot 4}{8\cdot 25}=\frac{75}{50}=\frac{3}{2}=1\tfrac{1}{2}$$

Conclusione

Dunque la data capacità colle acque riunite delle due fontane si empirà nel tempo di un'ora e mezza.

Verificazione

$$\frac{\frac{3}{2}}{2\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{2}}{3\frac{3}{4}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}+\frac{\frac{3}{2}}{\frac{15}{4}}=\frac{3\cdot 2}{2\cdot 5}+\frac{3\cdot 4}{15\cdot 2}=\frac{3}{5}+\frac{6}{15}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1$$

Come si dovea trovare.

Problema XII.

Un negoziante accresce il suo capitale di una parte $m.^{sima}$ ogni anno, dopo avere sottratta una somma di lire a per le spese occorsegli durante l'anno. Dopo n anni il suo capitale trovasi aumentato di lire b. Si domanda il primo capitale.

Raziocinio per l' Equazione

Sia x il capitale cercato. Dopo avergli levate lire a si ridurrà ad $x-a$. Essendo in generale

$$p+\frac{p}{m}=\frac{pm+p}{m}=p\left(\frac{m+1}{m}\right)$$

si deduce, che ogni quantità accresciuta della sua parte $m.^{sima}$ è eguale a se stessa moltiplicata nella frazione $\frac{m+1}{m}$. Si avrà quindi $x-a$ accresciuto della sua parte $m.^{sima}$ espresso da $\frac{(x-a)(m+1)}{m}$, e sarà questo il capitale del 2.° anno.

Toltevi lire a nel 2.° anno si avrà $\frac{(x-a)(m+1)-a}{m}$, ossia $\frac{(x-a)(m+1)-am}{m}$, cui aggiunta la sua parte $m.^{sima}$ sarà

$$\left\{\frac{(x-a)(m+1)-am}{m}\right\}\left\{\frac{m+1}{m}\right\}=\frac{(x-a)(m+1)^2-am(m+1)}{m^2}$$

l' espressione del capitale del 3.° anno.

Toltevi ancora lire a, ossia $\frac{am^2}{m^2}$ si avrà $\frac{(x-a)(m+1)^2-am(m+1)-am^2}{m^2}$

che accresciuto della sua parte $m.^{sima}$ ci darà pel capitale del 4.° anno $\frac{(x-a)(m+1)^3-am(m+1)^2-am^2(m+1)}{m^3}$

Seguendo la legge indicata in queste formole dopo un numero n di anni, il capitale dell' anno $n+1$ sarà espresso dalla formola

$$\frac{(x-a)(m+1)^n-am(m+1)^{n-1}-am^2(m+1)^{n-2}-am^3(m+1)^{n-3}\ldots\ldots-am^{n-1}(m+1)}{m^n}$$

Ma dopo questo numero d' anni il 1.° capitale x debb' essere aumentato di lire b. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{(x-a)(m+1)^n-am(m+1)^{n-1}-am^2(m+1)^{n-2}\ldots-am^{n-1}(m+1)}{m^n}=x+b$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per m^n. 2.° Si eseguisca la moltiplica accennata nel 1.° termine del 1.° membro. 3.° Si sottragga $m^n x$. 4.° Si portino

tutti i termini, che non contengono la x nel 2.° membro, scrivendoveli col segno contrario a quello, che hanno attualmente nel 1.° 5.° Si divida pel coefficiente della x, che riesce $(m+1)^n - m^n$, e si avrà

$$(A)\ x = \frac{bm^n + a(m+1)^n + am(m+1)^{n-1} + am^2(m+1)^{n-2} \ldots + am^{n-1}(m+1)}{(m+1)^n - m^n}$$

Conclusione

Dunque il capitale del 1.° anno sarà stato di un numero di lire rappresentato dalla formola (A).

Verificazione

Ci dispensiamo dal verificare la soluzione generale, perchè importerebbe una troppo nojosa complicazione di operazioni; verificheremo però la soluzione nel caso particolare della seguente

Applicazione

Accresca il negoziante di un quarto per anno il suo capitale, dopo averne sottratta una somma annualmente di lire tremille, e duecento per le sue spese; e dopo due anni il capitale si trovi aumentato di lire diciottomille. Avrassi

$$a = 3200;\ m = 4;\ n = 2;\ b = 18000$$

$$\text{Dunque } x = \frac{18000 \cdot 4^2 + 3200 \cdot 5^2 + 3200 \cdot 4 \cdot 5}{5^2 - 4^2} = \frac{18000 \cdot 16 + 3200\,(25 + 20)}{25 - 16} = \frac{432000}{9} = 48000$$

Conclusione

Dunque il 1.° capitale era di *lir.* 48000.

Verificazione

Nel 1.° anno sottratte *lir.* 3200 da 48000 restano *lir.* 44800. Il guadagno del 1.° anno è $\frac{44800}{4} = 11200$. Dunque il capitale del 2.° anno era *lir.* $44800 + 11200 = 56000$. Sottratte anche nel 2.° anno *lir.* 3200

restano *lir.* 52800. Il guadagno del 2.° anno è $\frac{52800}{4} = 13200$. Dunque il capitale dopo il 2.° anno sarà *lir.* $52800 + 13200 = 66000$. Se da questa somma si leverà il 1.° capitale si avranno per residuo *lir.* 18000, ch'è precisamente l'aumento supposto.

Problema XIII.

Un terremoto abbattè in varie scosse molte case di una città; in una ne rovesciò la $n.^{sima}$ parte; in un'altra la $m.^{sima}$, e in tutte le successive la $r.^{sima}$, talchè rimasero solo in piedi case numero a. Quante case avea la città innanzi la prima scossa.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero delle case, che si cerca. Nella 1.ª scossa il terremoto abbattè case $\frac{x}{n}$, nella 2.ª $\frac{x}{m}$, e nelle altre $\frac{x}{r}$. Se a queste case rovesciate aggiugneremo le superstiti si otterrà il totale delle case, che contava la città avanti la prima scossa. Avrassi pertanto la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \frac{x}{r} + a = x$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per mnr. 2.° Si sottraggano nrx, mnx, mrx. 3.° Si ordini la equazione per x. 4.° Si divida pel coefficiente totale della x, cioè per $rm(n-1) - n(m+r)$, e si avrà

$$x = \frac{amnr}{rm(n-1) - n(m+r)}$$

Conclusione

Dunque la città avanti la prima scossa aveva un numero di case rappresentate dalla formola $\frac{amnr}{rm(n-1) - n(m+r)}$

Verificazione

La parte $n.^{sima}$ sarà. . . . . $\frac{mra}{rm(n-1)-n(m+r)}$

La parte $m.^{sima}$ . . . . . $\frac{nra}{rm(n-1)-n(m+r)}$

La parte $r.^{sima}$ . . . . . $\frac{mna}{rm(n-1)-n(m+r)}$

Sommate queste quantità, ed aggiuntovi il numero a di case rimaste in piedi dovrassi avere la formola trovata per x. Ed è infatti

$$\frac{mra+nra+mna}{rm(n-1)-n(m+r)}+a=\frac{mra+nra+mna+armn-arm-anm-anr}{rm(n-1)-n(m+r)}=\frac{amnr}{rm(n-1)-n(m+r)}$$

ch' è l' accennata formola.

Applicazione

Si supponga, che nella prima scossa il terremoto abbia abbattuto un ventesimo delle case, nella susseguente un decimo, e nelle altre una quarta parte, cosicchè rimanessero superstiti soltanto duecento quaranta edificj. Avremo

$$n=20;\ m=10;\ r=4;\ a=240$$

Dunque $x=\frac{20.10.4.240}{4.10(20-1)-20(10+4)}=\frac{192000}{4.10.19-20.14}=\frac{192000}{760-280}=\frac{192000}{480}=400$

Conclusione

Dunque le case della città innanzi la prima scossa di terremoto erano 400.

Verificazione

Ventesimo di 400	20
Decimo di 400	40
Quarto di 400.	100
Somma delle case abbattute	160

Se da 400 case ne toglieremo 160 si avranno di residuo case 240, come accenna il problema.

Problema XIV.

Dati due numeri trovarne un terzo, il quale aggiunto al minore dei dati, e dal maggiore sottratto, abbia il residuo al composto una data ragione qualunque.

Raziocinio per l'Equazione

Esprima x il numero cercato. Il numero maggiore dato sia p, il minore q. La ragione, in cui deve stare il residuo al composto sia $:: 1 : m$. Per condizione del problema si avrà l'analogia

$$p - x : q + x :: 1 : m \qquad (\varphi)$$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$x + q = pm - mx$$

Soluzione

1.° Si aggiunga mx. 2.° Si sottragga q. 3.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 4.° Si divida per $m + 1$, e si avrà

$$x = \frac{pm - q}{m + 1}$$

Conclusione

Dunque il numero cercato sarà $\frac{pm - q}{m + 1}$

Verificazione

Sostituito il valore trovato per la x nella proporzione (φ) si avrà

$$p - \left(\frac{pm - q}{m + 1}\right) : q + \left(\frac{pm - q}{m + 1}\right) :: 1 : m$$

Si moltiplichi la 1.ª ragione per $m + 1$, e sarà

$$mp + p - mp + q : mq + q + mp - q :: 1 : m$$

E riducendo

$$p + q : m\,(p + q) :: 1 : m$$

E dividendo la 1.ª ragione per $p + q$ si avrà finalmente

$$1 : m :: 1 : m$$

Come doveasi trovare.

Applicazione

Sia il numero maggiore cento, il minore venti, e la data ragione sia di uno a quattro. Sarà

$$p = 100 \; ; \; q = 20 \; ; \; m = 4$$

Dunque $x = \frac{100 \cdot 4 - 20}{4 + 1} = \frac{400 - 20}{5} = \frac{380}{5} = 76$

Conclusione

Dunque 76 è il numero cercato.

Verificazione

Da 100 sottratto 76 si ha il residuo 24; e aggiunto il 76 al 20 si ha 96. Quindi si verifica la proporzione

$$24 : 96 :: 1 : 4$$

nella quale il prodotto degli estremi è 96, come lo è pure quello dei medj.

Problema XV.

L'età di una persona è $m.^{pla}$ di quella d'un suo figlio. Dopo quanti anni diventerà $n.^{pla}$

Raziocinio per l'Equazione

Facciasi x il numero degli anni, di cui si cerca. Si chiami φ l'età del padre; quella del figlio sarà $\frac{\varphi}{m}$. Dopo anni x il padre avrà anni $\varphi + x$, ed il figlio $\frac{\varphi}{m} + x$. Ma dopo questo tempo l'età del padre debb'essere $n.^{pla}$ di quella del figlio. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\varphi + x = n \left(\frac{\varphi}{m} + x \right)$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per m. 2.° Si sottragga mnx, e $m\varphi$. 3.° Si sciol-

gano ambedue i membri dell'equazione ne' loro fattori. 4.° Si divida per $m - nm$, ossia per $m(1-n)$, e si avrà

$$x = \frac{\varphi(n-m)}{m(1-n)} = \frac{\varphi(m-n)}{m(n-1)}$$

Conclusione

Dunque l'età del padre diventerà $n.^{pla}$ di quella del figlio dopo anni $\frac{\varphi}{m}\left(\frac{m-n}{n-1}\right)$.

Verificazione

Dopo questi anni l'età del padre sarà. . . $\varphi + \frac{\varphi}{m}\left(\frac{m-n}{n-1}\right)$ (q)

Quella del figlio. . . . . $\frac{\varphi}{m} + \frac{\varphi}{m}\left(\frac{m-n}{n-1}\right)$ (q')

Per verificare la soluzione bisogna moltiplicare per n la quantità (q'), e vedere, se diventa eguale a (q). Eseguendo questa operazione si avrà

$$n\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{\varphi(m-n)}{m(n-1)}\right) = \frac{n\varphi}{m} + \frac{n\varphi m - n^2\varphi}{mn - m} = \frac{n^2\varphi - n\varphi + n\varphi m - n^2\varphi}{mn - m} =$$

$$\frac{n\varphi m - n\varphi}{mn - m} = \varphi + \frac{\varphi}{m}\left(\frac{m-n}{n-1}\right)$$ ch'è precisamente la quantità (q).

Applicazione

Sia l'età del padre d'anni sessanta, e quintupla di quella del figlio. Si cerca in quanti anni potrà diventare tripla. Avrassi

$$\varphi = 60\ ;\ m = 5\ ;\ n = 3$$

Dunque $x = \frac{60(5-3)}{5(3-1)} = \frac{60 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{60}{5} = 12$

Conclusione

Dunque diventerà tripla dopo 12 anni.

Verificazione

Dopo 12 anni il padre avrà 72 anni, e il figlio ne avrà 24; dove si verifica l'età del padre tripla di quella del figlio.

Problema XVI.

Dato un numero qualunque dividerlo in tre parti tali, che l'eccesso del numero medio sul minore sia un dato numero, e sia parimenti un numero dato l'eccesso del maggiore sul medio.

Raziocinio per l'Equazione

Sia a il proposto numero da dividersi. Rappresenti p l'eccesso del medio sul minore, e q l'eccesso del maggiore sul medio. Chiamato x il numero minore, il medio sarà $x+p$, ed il maggiore $x+p+q$. Ma questi tre numeri debbono essere uguali ad a. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$x+x+p+x+p+q=a$$

Soluzione

1.° Si sommino le x. 2.° Si sottragga $2p$, e q. 3.° Si divida per 3, e sarà

$$x=\frac{a-2p-q}{3}$$

Conclusione

Dunque il numero minore sarà $\frac{a-2p-q}{3}$

Il medio . . . . . $\frac{a-2p-q}{3}+p=\frac{a-2p-q+3p}{3}=\frac{a+p-q}{3}$

Il maggiore. . . . . $\frac{a-2p-q}{3}+p+q=\frac{a-2p-q+3p+3q}{3}=\frac{a+p+2q}{3}$

Verificazione

La somma di questi tre numeri deve formare a. Ed è infatti

$$\frac{a-2p-q}{3}+\frac{a+p-q}{3}+\frac{a+p+2q}{3}=\frac{3a}{3}=a$$

Applicazione

Il numero da dividersi sia duecento trenta. L'eccesso del medio sul minore sia tredici, e quello del maggiore sul medio sia ventinove. Avrassi

$$a=230\ ;\ p=13\ ;\ q=29$$

Dunque $x=\frac{230-26-29}{3}=\frac{230-55}{3}=\frac{175}{3}=58\frac{1}{3}$

Conclusione

Dunque il numero minore sarà . . . . . $58\frac{1}{3}$

Il medio . . . . . $71\frac{1}{3}$

Il maggiore . . . . . $100\frac{1}{3}$

Verificazione

$$58\frac{1}{3} + 71\frac{1}{3} + 100\frac{1}{3} = 229\frac{3}{3} = 230$$

Problema XVII.

Si domandano due numeri, de' quali il minore stia al maggiore nella ragione di $m:n$, e il cui prodotto vaglia q volte la loro somma.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero minore ricercato. Per condizione del problema il maggiore sarà il 4.to termine della proporzione $m:n::x:4.^{to} = \frac{nx}{m}$. La loro somma sarà $x + \frac{nx}{m} = \frac{mx+nx}{m} = x\left(\frac{m+n}{m}\right)$; ed il loro prodotto $\frac{nx^2}{m}$. Ma questo prodotto debb'essere uguale a q volte la somma. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{nx^2}{m} = qx\left(\frac{m+n}{m}\right) .$$

Soluzione

Questa equazione sebbene ci si presenti coll'incognita elevata al quadrato, pure è del primo grado, giacchè dividendola per x, abbiamo

$$\frac{nx}{m} = q\left(\frac{m+n}{m}\right)$$

1.° Si moltiplichi per m. 2.° Si divida per n, e si avrà

$$x = \frac{q}{n}(m+n)$$

Conclusione

Dunque il numero minore sarà . . . $\frac{q}{n}(m+n)$

Ed il maggiore . . . . . $\frac{q}{m}(m+n)$

Verificazione

I due numeri debbono stare fra loro nella ragione di $m:n$. Ed è infatti

$$\frac{q}{n}(m+n):\frac{q}{m}(m+n)::\frac{q}{n}:\frac{q}{m}::m:n$$

Colla stessa facilità si potrebbe verificare, che il prodotto dei due numeri vale q volte la loro somma.

Applicazione

Il numero minore stia al maggiore nella ragione di $2:3$, ed il prodotto dei numeri sia il sestuplo della loro somma. Avrassi

$$m=2;\ n=3;\ q=6$$

Dunque $x=\frac{6}{3}(2+3)=2.5=10$

Conclusione

Dunque il numero minore sarà 10

Il maggiore . . . . . $\frac{3}{2}\times 10=\frac{30}{2}=15$

Verificazione

La somma de' numeri è 25. Il loro prodotto è 150, ch'è precisamente il sestuplo di 25.

Colla stessa facilità si vedrebbe, che il minore sta al maggiore nella ragione di $m:n$.

Problema XVIII.

Due pesi l'uno minore di libbra a, l'altro maggiore di libbra b sono sospesi all'estremità d'una verga inflessibile, che ha diti m di lunghezza. Domandasi qual punto della verga dovrebb'essere sostenuto, perchè i due pesi fossero in equilibrio; ossia, ch'è lo stesso, si domanda a

quale distanza trovasi questo punto dall'una, e dall'altra estremità della verga.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x la distanza, in cui è il punto d'equilibrio dalla parte del peso maggiore, la distanza dall'altro sarà $m - x$, e per condizione del problema avrassi la proporzione

$$x : m - x :: a : b$$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$bx = am - ax$$

Soluzione

1.° Si aggiunga ax. 2.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 3.° Si divida per $b + a$, e si avrà

$$x = \frac{am}{b + a}$$

Conclusione

Dunque il punto d'equilibrio preso dalla parte del peso maggiore sarà espresso dalla porzione della verga $\frac{am}{b + a}$; e la distanza d'esso punto dall'altra parte verrà rappresentata da $m - \frac{am}{b + a} = \frac{am + bm - am}{b + a} = \frac{bm}{b + a}$.

Verificazione

Sta infatti $\frac{am}{a + b} : \frac{bm}{a + b} :: am : bm :: a : b$.

Applicazione

Il peso maggiore sia di libbra sette, il minore di libbra cinque, e trentasei diti sia lunga la verga. Avrassi

$$a = 5;\ b = 7;\ m = 36.$$

Dunque $x = \frac{5 . 36}{5 + 7} = \frac{180}{12} = 15$.

Conclusione

Dunque il punto d'equilibrio sarà posto alla distanza di 15 diti dal peso maggiore, e di $36 - 15 = 21$ dal minore.

Verificazione

Se i pesi fossero stati eguali è evidente, che il punto d'equilibrio sarebbesi trovato precisamente nel mezzo della verga: ma siccome uno di questi è minore dell'altro, così il punto, di cui si tratta, dovrà essere situato proporzionalmente alla forza dei due pesi. Nel nostro caso si verifica infatti la proporzione $15 : 21 :: 5 : 7$

Problema XIX.

Un mercante ha due qualità di vino. Il migliore costa m soldi alla pinta, e l'altro ne costa n. Mescolando i due vini vuol fare q pinte da vendere a soldi a la pinta. Come eseguirà la mistura.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero delle pinte del vino di prima qualità, ch'entrano nel misto. Quello della 2.ª sarà $q - x$. Egli è chiaro, che la quantità mx esprimerà in soldi il prezzo del vino impiegato della prima qualità, e $n(q - x)$ quello della 2.ª; quindi $mx + n(q - x)$ sarà il prezzo totale della mistura. Ma pinte q a soldi a la pinta importano soldi aq, e questa somma debb'essere eguale ad $mx + n(q - x)$. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$mx + n(q - x) = aq$$

Soluzione

1.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 2.° Si sottragga nq. 3.° Si sciolgano i due membri ne' loro fattori. 4.° Si divida per $m - n$, e sarà

$$x = \frac{q(a - n)}{m - n}$$

Conclusione

Dunque del vino migliore entreranno nella mistura pinte $\frac{q(a-n)}{m-n}$

E dell'inferiore $q - q\left(\frac{a-n}{m-n}\right) = \frac{qm - qn - aq + nq}{m-n} = \frac{qm - aq}{m-n} = q\left(\frac{m-a}{m-n}\right)$

Verificazione

Le pinte del vino migliore costano . . . . $mq\left(\frac{a-n}{m-n}\right)$

Quelle dell'inferiore . . . . . $nq\left(\frac{m-a}{m-n}\right)$

La somma pertanto del prezzo totale sarà

$$mq\left(\frac{a-n}{m-n}\right) + nq\left(\frac{m-a}{m-n}\right) = \frac{mqa - mnq + mnq - nqa}{m-n} = aq\left(\frac{m-n}{m-n}\right) = aq$$

Come doveasi trovare.

Applicazione

Si supponga, che il vino migliore costi otto soldi, e due l'inferiore; e che voglia fare due pinte da vendersi a quattro soldi la pinta. Avrassi

$$m = 8\,;\ n = 2\,;\ q = 2\,;\ a = 4$$

Dunque $x = 2\left(\frac{4-2}{8-2}\right) = \frac{2 \cdot 2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Conclusione

Dunque impiegherà $\frac{2}{3}$ di una pinta del vino migliore, e dell'inferiore $2 - \frac{2}{3} = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

Verificazione

Si verifica primamente, che due terzi di pinta di vino migliore, ed una pinta, e un terzo dell'inferiore fanno due pinte. Il valore poi di $\frac{2}{3}$ di pinta a soldi 8 sarà soldi $5\frac{1}{3}$, e quello di pinte $1\frac{1}{3}$ a soldi 2 sarà soldi $2\frac{2}{3}$; conseguentemente la somma di questi due valori sarà di soldi 8, ch'è precisamente l'importo delle due pinte di vino, che voglionsi vendere a soldi 4 la pinta.

Problema XX.

Un legatore di libri vende due libri l'uno di fogli m per soldi c, e l'altro di fogli n per soldi e, ambedue legati egualmente, e della medesima qualità di carta e stampa. Si domanda quanto faccia pagare la legatura.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero de' soldi posti in conto per la legatura. Il prezzo della carta che vi ha nel 1.° libro sarà di soldi $c-x$, e quello della carta del 2.° $e-x$. Per condizione del problema si avrà la proporzione (φ)

$$c-x : e-x :: m : n$$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$cn-nx=me-mx$$

Soluzione

1.° Aggiungasi mx. 2.° Si sottragga cn. 3.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 4.° Si divida per $m-n$, e si avrà

$$x=\frac{me-cn}{m-n}$$

Conclusione

Dunque la legatura costa $\frac{me-cn}{m-n}$

Verificazione

Infatti nella proporzione (φ) sostituito il valore trovato per la x abbiamo

$$c-\left(\frac{me-cn}{m-n}\right) : e-\left(\frac{me-cn}{m-n}\right) :: m : n$$

Riducendo al medesimo denominatore la 1.ª ragione si otterrà

$$\frac{cm-cn-me+cn}{m-n} : \frac{em-en-me+cn}{m-n} :: m : n$$

Semplificando . . . . . $\frac{cm-me}{m-n} : \frac{cn-en}{m-n} :: m : n$

Ossia . . . . . $m\left(\frac{c-e}{m-n}\right) : n\left(\frac{c-e}{m-n}\right) :: m : n$

Dividendo la prima ragione pel fattore comune si avrà finalmente

$$m : n :: m : n$$

Applicazione

Suppongasi, che il 1.° libro contenesse quarantotto fogli, e si fosse venduto per quaranta soldi; che il 2.° contenesse fogli settantacinque, e si fosse venduto per soldi cinquantotto. Avrassi

$$m = 48 \; ; c = 40 \; ; n = 75 \; ; e = 58$$

Dunque $x = \frac{48 \cdot 58 - 40 \cdot 75}{48 - 75} = \frac{2784 - 3000}{48 - 75} = \frac{-216}{-27} = 8$

Conclusione

Dunque la legatura costava 8 soldi. Conseguentemente il prezzo della carta del 1.° libro importava soldi 32, e soldi 50 quello della carta del 2.°

Verificazione

Se l'operazione è esatta i prezzi trovati della carta debbono essere proporzionali alle quantità de' fogli della carta istessa. E si verifica infatti

1.° ss. 32 : ss. 50 :: 16 : 25
2.° fogl. 48 : fogl. 75 :: 16 : 25

Problema XXI.

Due mobili A, e B distanti tra loro d'un intervallo d si muovono sulla stessa linea l'uno incontro all'altro. Il 1.° ha V di velocità, e v il 2.° Ma il 1.° muovesi per un tempo t prima del 2.° Si cerca il tempo, in cui A incontrerà B, e lo spazio da ambedue i mobili percorso prima d'incontrarsi.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il tempo impiegato dal mobile A prima d'incontrare B. Sarà $x - t$ il tempo impiegato dal mobile B, cioè tutto il tempo, che impiega A, meno quello, di cui A precede B. Ma lo spazio, che si percorre da un mobile nel moto equabile per un dimostrato principio di

Dinamica è il prodotto del tempo nella velocità. Dunque lo spazio percorso da A sarà Vx, e quello percorso da B sarà $v(x-t)$. Ma questi due spazj per condizione del problema debbono essere uguali a d. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$Vx + v(x-t) = d$$

Soluzione

1.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 2.° Si aggiunga vt. 3.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 4.° Si divida per $V+v$, e si avrà

$$x = \frac{d+vt}{V+v}$$

Conclusione

Dunque il mobile A impiegherà un tempo rappresentato dalla formola $\frac{d+vt}{V+v}$ prima di raggiungere B.

E lo spazio percorso in questo tempo sarà $V\left(\frac{d+vt}{V+v}\right)$

Il tempo impiegato dal mobile B prima d'incontrare A sarà espresso dalla formola seguente

$$x - t = \frac{d+vt}{V+v} - t = \frac{d+vt-Vt-vt}{V+v} = \frac{d-Vt}{V+v}$$

E lo spazio percorso in questo tempo sarà $v\left(\frac{d-Vt}{V+v}\right)$

Verificazione

Si osservi se lo spazio percorso dai due mobili equivalga a d, come esige il problema. Si ha infatti

$$V\left(\frac{d+vt}{V+v}\right) + v\left(\frac{d-Vt}{V+v}\right) = \frac{Vd+Vvt+vd-Vvt}{V+v} = \frac{Vd+vd}{V+v} = d\left(\frac{V+v}{V+v}\right) = d$$

Applicazione

Parta da Milano per Torino un corriere, e sia la sua velocità tale, che faccia cinque miglia all'ora: ne parta un altro dopo sette ore da

Torino per venire a Milano, e faccia sei miglia all' ora. Si cerca dove s' incontreranno i due corrieri. Avrassi

$$d = 90 \; ; \; V = 5 \; ; \; v = 6 \; ; \; t = 7$$

Si è fatto $d = 90$, perchè 90 miglia è la distanza da Milano a Torino.

Dunque $x = \frac{90 + 6 \cdot 7}{5 + 6} = \frac{90 + 42}{11} = \frac{132}{11} = 12$

Conclusione

Dunque il 1.° corriere impiegherà 12 ore prima di raggiugnere il 2.°, e lo spazio dal 1.° percorso sarà di miglia $12 . 5 = 60$. Il 2.° corriere impiegherà ore $\frac{90 - 35}{11} = \frac{55}{11} = 5$ prima d'incontrare il 1.°, e lo spazio da lui percorso sarà di miglia $5 . 6 = 30$; cosicchè i due corrieri s' incontreranno 30 miglia distanti da Torino.

Verificazione

Riunendo gli spazj percorsi dai due corrieri si ha $30 + 60 = 90 = d$, ed incontrandosi alla distanza di 30 miglia da Torino si verifica, che il corriere partito da Milano ha dovuto percorrere 60 miglia.

Problema XXII.

Un mobile A colla velocità V parta da un dato punto. Un altro B colla velocità $V + v$ sulla stessa linea parta dopo un dato tempo t da una distanza d per raggiugnere A, che gli fugge d'innanzi. Cercasi quando, e dopo quanto spazio lo raggiugnerà.

Raziocinio per l' Equazione

Sia x il tempo impiegato dal mobile A prima d'essere raggiunto. Sarà $x - t$ il tempo impiegato da B per raggiugnerlo. Lo spazio percorso da A sarà Vx, e quello percorso da B sarà $(x - t)(V + v)$. Ma per condizione del problema lo spazio percorso dal primo mobile più la differenza d debb'essere uguale allo spazio percorso dal secondo. Dunque avrassi la seguente

Equazione del Problema

$$Vx + d = (x - t)(V + v)$$

Soluzione

1.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 2.° Si sottragga Vx. 3.° Si aggiunga Vt, e vt. 4.° Si ordini l'equazione per x, e si divida per v. Si avrà

$$x = \frac{d + t\,(V + v)}{v}$$

Conclusione

Dunque il mobile A prima d'essere raggiunto correrà per un tempo determinato dalla formola $\frac{d + t(V + v)}{v}$, e percorrerà uno spazio determinato da quest'altra formola $V\left\{\frac{d + t\,(V + v)}{v}\right\}$.

Il tempo poi impiegato da B per raggiugnere A sarà

$$x - t = \frac{d + t(V + v)}{v} - t = \frac{d + tV + vt - vt}{v} = \frac{d + tV}{v}$$

E lo spazio percorso da questo secondo mobile sarà

$$(V + v)\left(\frac{d + tV}{v}\right) = (\varphi)$$

Verificazione

Lo spazio percorso dal 1.° più la distanza d, che passa fra i due mobili debb'essere uguale allo spazio percorso dal 2.°, e si ha infatti

$$V\left\{\frac{d + t\,(V + v)}{v}\right\} + d = \frac{Vd + tVV + tvV + vd}{v} = (V + v)\left(\frac{d + tV}{v}\right) = (\varphi)$$

Applicazione

Determinare precisamente il tempo, in cui l'indice dei minuti debb'essere in contatto coll'indice delle ore in un orologio per tutto il corso delle dodici ore.

Questo problema per altra via si potrebbe sciogliere più speditamento; ciò non ostante lo scioglieremo colle formole del nostro problema per una elegante sua applicazione.

Suppongasi, che l'indice delle ore sia in contatto con quello dei minuti, talchè gl'indici si muovano nello stesso tempo. Perchè l'indice de' minuti raggiunga di nuovo quello delle ore, deve percorrere uno spazio eguale a tutto il quadrante, ch'è 60.°, più lo spazio, che in questo tempo percorre l'indice delle ore prima d'essere raggiunto. Ma lo spazio percorso da quest'indice, supposta V la sua velocità, e supposto, che si muova per un tempo x, è il tempo moltiplicato nella velocità, cioè Vx. Dunque l'indice de' minuti percorrerà uno spazio $60 + Vx$. Per condizione del problema si ha $d = 60$, e per la supposizione, che i due indici sieno in contatto sarà $t = 0$; e stando la velocità dell'indice delle ore a quella dell'indice de' minuti :: 5 : 60 :: 1 : 12, sarà $V = 1$, $v = 11$. Dunque sostituiti questi valori nella formola generale trovata per x nel nostro problema si avrà $x = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$

Dunque il tempo impiegato in minuti dall'indice delle ore sarà $5\frac{5}{11}$, e lo spazio percorso, essendo $V = 1$, sarà parimenti $5\frac{5}{11}$

Il tempo impiegato dall'indice de' minuti, espresso in minuti, sarà esso pure $5\frac{5}{11}$, perchè gl'indici muovonsi nello stesso istante, e perciò il tempo, che deve impiegare l'indice de' minuti per raggiugnere quello delle ore dev'essere precisamente quello istesso, che percorre questo indice delle ore prima d'essere raggiunto. Lo spazio poi percorso dall'indice de' minuti sarà $60 + 5\frac{5}{11} = 65\frac{5}{11}$

Questo spazio da percorrersi tanto dall'uno, quanto dall'altro indice è sempre uguale in qualunqne punto dell'orologio suppongansi in contatto.

Sieno in contatto sulle dodici ore, e si cerchi dopo un dato numero n di ore in qual punto si troveranno ancora in contatto. Basterà, com'è chiaro, moltiplicare per n lo spazio percorso da uno dei due indici per avere la soluzione del quesito. Sarà però meglio appigliarsi a quello delle ore, perchè il calcolo riesce più breve. L'espressione generale sarà adunque $n\left(5\frac{5}{11}\right)$. Ma questa formola, come si è detto, esprime de' minuti: se vorrassi pertanto ridurla ad esprimere delle ore, sapendo, che lo spazio percorso dall'indice delle ore per segnare un'ora è di 5

minuti, basterà dividere per 5 l'espressione $5\frac{5}{11}$; onde la formola espressa per ore sarà $n\left(1\frac{1}{11}\right)$

Conclusione

Dunque la formola generale, che darà la soluzione di applicazione è $n\left(1\frac{1}{11}\right)$

Verificazione

La verificazione chiaramente si ottiene dando ad n tutti que' valori, che si vogliono, entro i limiti però delle supposizioni del problema, per cui non può essere $n > 12$. Ritenuti questi valori, che si possono sensibilmente verificare coll' orologio alla mano, si forma la seguente

TAVOLA pel contatto dei due indici

Quando l'indice delle ore sarà tra le ore	1, e 2. Quello de' minuti sarà in contatto alle ore	1. $5'\frac{5'}{11}$
	2, e 3	2. $10'\frac{10'}{11}$
	3, e 4	3. $16'\frac{4'}{11}$
	4, e 5	4. $21'\frac{9'}{11}$
	5, e 6	5. $27'\frac{3'}{11}$
	6, e 7	6. $32'\frac{8'}{11}$
	7, e 8	7. $38'\frac{2'}{11}$
	8, e 9	8. $43'\frac{7'}{11}$
	9, e 10	9. $49'\frac{1'}{11}$
	10, e 11	10. $54'\frac{6'}{11}$
	11, e 12	12

Vogliasi sapere a cagion d'esempio, quando i due indici si troveranno in contatto tra le ore 1, e 2. Facciasi $n = 1$, e la nostra formola

riesce $1\frac{1}{11}$, quindi i due indici si troveranno in contatto nel punto di un'ora, e di un undicesimo di ora, ossia di ore 1, minuti primi 5, e cinque undicesimi di un minuto primo.

Fra le 2, e le 3. Facciasi $n=2$, e la formola diventa $2\frac{2}{11}$, ossia ore 2, minuti primi 10, e dieci undicesimi di un minuto primo. E così successivamente.

Problema XXIII.

Tizio ha due mucchj di grano, uno scelto composto di moggia p gli costa lire a, e l'altro costa lire b allo stajo. Domanda Tizio quante moggia debba prendere dal mucchio di grano scelto, ed aggiugnervene dell'inferiore, onde ritenuta ancora la misura di moggia p, e vendendole allo stesso prezzo del grano di prima qualità possa ricavare un guadagno $\frac{m}{n}$ sul totale della vendita.

Raziocinio per l'Equazione

Si ritenga la misura del sistema vecchio milanese, in cui un moggio equivale ad otto staja. Poichè anche dopo la mistura del grano la quantità delle moggia debb'essere p, egli è evidente, che la quantità del grano tolto alle moggia p, che costano lire a sarà la stessa, che vi si debbe aggiugnere del grano, che costa lire b allo stajo, ossia lire $8b$ al moggio. Sia x questa quantità espressa per numero di moggia: il valore d'un moggio della 1.ª qualità sarà $\frac{a}{p}$. Dunque se da p si toglie x, il grano residuo varrà $(p-x)\frac{a}{p}$. Ma vi si deve aggiugnere lo stesso numero x di moggia del grano, che costa lire $8b$ al moggio. Dunque $(p-x)\frac{a}{p}+8bx$ sarà il prezzo del grano misto. Questo prezzo però è l'adeguato, e se a tal prezzo vendesse Tizio il grano nulla guadagnerebbe. Ma egli vuole il guadagno $\frac{m}{n}$. Dunque $\frac{m}{n}\left\{(p-x)\frac{a}{p}+8bx\right\}$ sarà il guadagno, che aggiunto allo stesso prezzo adeguato darà una somma eguale a lire a del primo costo, al cui prezzo Tizio vuol vendere ancora il suo grano mescolato. Si avrà dunque la seguente

Equazione del Problema

$$(p-x)\frac{a}{p}+8bx+\frac{m}{n}\left\{(p-x)\frac{a}{p}+8bx\right\}=a$$

Soluzione

1.° Si eseguiscano le prime moltipliche $(p-x)\frac{a}{p}$. 2.° Si riduca la x sotto i suoi fattori $\left(8b-\frac{a}{p}\right)$. 3.° Si moltiplichi per n. 4.° Si sottragga an. 5.° Si moltiplichi per p. 6.° Si sottragga amp. 7.° Si cangino i segni all'equazione. 8.° Si riduca la x sotto un solo fattore. 9.° Si divida per questo fattore, e si avrà

$$x=\frac{amp}{(a-8bp)(m+n)}$$

Conclusione

Dunque dal mucchio di grano inferiore prenderà moggia $\frac{amp}{(a-8bp)(m+n)}$ che deve aggiugnere al grano scelto, dal cui mucchio leverà moggia

$$p-\frac{amp}{(a-8bp)(m+n)}=\frac{p(a-8bp)(m+n)-amp}{(a-8bp)(m+n)}=\frac{amp-8bp^2m+nap-8bnp^2-amp}{(a-8bp)(m+n)}$$

$$=\frac{pan-8bp^2(m+n)}{(a-8bp)(m+n)}=\frac{pan}{(a-8bp)(m+n)}-\frac{8bp^2}{a-8bp}$$

Questa formola si chiami (A)

Verificazione

Ci dispensiamo dal verificare la formola generale, perchè c'ingolferebbe in molte, e nojose operazioni. Verificheremo però la soluzione applicando la formola ad un caso particolare.

Applicazione

Suppongasi, che Tizio abbia due mucchj di grano: l'uno scelto composto di moggia cinquantotto costa lire due mille cinquecento cinquantadue, e l'altro inferiore costa lire tre, e un ottavo di lira allo stajo. Domanda Tizio quante moggia debba cavare dal mucchio di grano scelto, e quante aggiugnervene dell'inferiore, onde vendendo ancora cinquan-

totto moggia di grano misto al prezzo del grano di prima qualità abbia il guadagno di lire sei, e un terzo di lira per cento. Si avrà

$$p = 58\,;\, a = 2552\,;\, b = 3\,\frac{1}{8} = \frac{25}{8}\,;\, \frac{m}{n} = \frac{6\,\frac{1}{3}}{100} = \frac{19}{300}\,;\ \text{onde } m = 19\,;\, n = 300$$

$$\text{Dunque } x = \frac{2552 \,.\, 19 \,.\, 58}{\left(2552 - \frac{8 \,.\, 25 \,.\, 58}{8}\right)\left(300 + 19\right)} = \frac{2552 \,.\, 1102}{1102 \,.\, 319} = \frac{2552}{319} = \frac{8 \,.\, 319}{319} = 8$$

Conclusione

Dunque prenderà 8 moggia della qualità di grano inferiore, e le porrà nel mucchio del grano migliore, da cui leverà moggia 50, dedotte dalla formola (A)

$$\frac{58 \,.\, 2552 \,.\, 300}{\left(2552 - \frac{8 \,.\, 25 \,.\, 58}{8}\right)\left(300 + 19\right)} - \frac{8 \,.\, 58^2 \,.\, 25}{8\left(2552 - \frac{8 \,.\, 25 \,.\, 58}{8}\right)} = \frac{44404800}{1102 \,.\, 319} - \frac{84100}{1102} = \frac{17576900}{351538} = 50$$

Si osservi, che si poteva dedurre questa quantità dall' espressione $p - x = 58 - 8 = 50$. Ma si è voluto ricavarla dalla formola (A), sebbene per più lunga via, onde dare la verificazione di ambedue le formole generali superiormente trovate.

Verificazione

Se moggia 58 valgono lir. 2552 varranno lir. 44 al moggio, e le 50 moggia del grano migliore impiegate nella vendita importeranno lir. 2200. Così se uno stajo del grano inferiore costa lir. $3\,\frac{1}{8}$, ossia $\frac{25}{8}$ di lira costerà lir. 25 al moggio, e quindi moggia 8 varranno lir. 200. Il prezzo adunque adeguato del misto sarà di lir. 2400. A questo prezzo dovrebbe Tizio vendere il suo grano, nulla guadagnando, e nulla perdendo. Ma lo vende a lir. 2552. Dunque ha il guadagno di lir. 152. Ora se la soluzione è esatta questo guadagno deve corrispondere al $6\,\frac{1}{3}$, ossia a $\frac{19}{300}$ per $\frac{0}{0}$ preso sopra il prezzo adeguato di lir. 2400. Ed è infatti

$$\frac{19}{300} \times 2400 = 19 \times \frac{24}{3} = 19 \times 8 = 152$$

Problema XXIV.

Tizio impiega un capitale di lire a fruttante ogni anno l'interesse $\frac{m}{n}$ in modo, che gl'interessi vanno a cumulo in capitale. Dal primo anno, in cui impiega il capitale, è multato dal Sovrano a pagare annualmente una somma tolta dal capitale impiegato, il quale perciò scema, e scema anche ne' suoi frutti. Dopo un numero p d'anni la multa consuma a Tizio e capitale, e frutti. Quale somma paga Tizio al Sovrano annualmente.

Raziocinio per l'Equazione

Nel 1.° anno il capitale a impiegato all'interesse $\frac{m}{n}$ dà il frutto $\frac{am}{n}$ emergente, com'è chiaro, dal quarto termine della proporzione $1 : \frac{m}{n} :: a : 4.^{to}$ Dunque alla fine del 1.° anno il capitale sarà

$$a + \frac{am}{n} = \frac{an + am}{n} = a\left(\frac{m+n}{n}\right)$$

Sia x la multa, che Tizio paga annualmente. Alla fine del 1.° anno il capitale coi frutti diventerà

$$a\left(\frac{m+n}{n}\right) - x = \frac{a(m+n) - nx}{n} = \varphi$$

Nel 2.° anno il frutto sarà $\frac{m}{n}\left\{\frac{a(m+n) - nx}{n}\right\} = \frac{am(m+n) - mnx}{n^2} = \pi$

Il capitale pertanto dopo il 2.° anno sarà $\varphi + \pi$, ossia moltiplicando, e dividendo per n la quantità eguale a φ, e ponendo i loro valori

$$\frac{an(m+n) - n^2x + am(m+n) - nmx}{n^2} = \frac{a(m+n)^2 - x\left(n(m+n)\right)}{n^2}$$

Da questa quantità tolta l'annua multa x, ossia $\frac{n^2x}{n^2}$ si avrà

$$\frac{a(m+n)^2 - x\left(n(m+n)\right) - n^2x}{n^2} = \frac{a(m+n)^2 - x\left\{n\left((m+n)+n\right)\right\}}{n^2} = \varphi'$$

La quantità φ' rappresenterà il capitale netto dopo il 2.° anno. Collo stesso andamento di operazioni il capitale netto dopo il 3.° anno sarà

$$\frac{a(m+n)^3 - x\left\{n\left((m+n)^2 + n(m+n) + n^2\right)\right\}}{n^3} = \varphi''$$

Osservate le formole rappresentanti i valori φ, φ', φ'' ..... si scorge chiaramente, ch' esse conservano una legge costante di derivazione. In ciascuna di quelle formole il 1.° termine del numeratore è composto di una quantità costante a, la quale è moltiplicata nel binomio $m+n$ alzato ad una potenza, il cui grado corrisponde sempre al numero degli anni dell' impiego. Da qui si deduce, che se si suppone p questo numero di anni, quel 1.° termine espresso sotto formola generale sarà $a(m+n)^p$. Il 2.° termine poi negativo del numeratore è composto del fattore costante $-nx$, e d'un altro, il quale varia bensì, ma conserva una regola esso pure costante nella variazione. Questo fattore è il binomio $(m+n)+n$, in cui $(m+n)$ va considerato come un termine solo. Si osservi, che questo fattore è sempre alzato ad una potenza, il cui grado è minore di una unità del numero degli anni d'impiego, colla sola eccezione, che nello sviluppo del binomio tutti i suoi termini non hanno i coefficienti portati dalla potenza, ma bensì hanno sempre per coefficiente l'unità. Così nel 1.° anno (formola φ) essendo uno il numero degli anni d'impiego il binomio $(m+n)+n$ è alzato alla potenza $1-1=0$, cioè è uguale all'unità, e perciò in essa formola quel binomio non apparisce. Nel 2.° anno il binomio è elevato alla potenza $2-1=1$ (formola φ'), e in essa abbiamo l'espressione semplice $(m+n)+n$. Nel 3.° (formola φ'') il binomio è alzato alla potenza seconda, e quindi è sotto la formola del suo quadrato, tranne i coefficienti, che sono costantemente eguali all'unità. Dunque per analogia il binomio da svilupparsi sotto formola generale sarà $\left((m+n)+n\right)^{p-1}$, e presa la formola di Newton, fatti eguali alla unità tutti i coefficienti, i termini dello sviluppo saranno

$$(m+n)^{p-1}+(m+n)^{p-2}.n+(m+n)^{p-3}.n^2....n^{p-1}$$

che si dovranno moltiplicare pel fattore costante $-nx$. Il denominatore poi è sempre la stessa quantità n alzata ad una potenza, il cui grado è sempre il numero degli anni dell'impiego. Dunque posto p questo numero d'anni dell'impiego, il denominatore sarà n^p. Si potrà pertanto comporre la formola generale ordinata nelle sue potenze pel numero p d' anni d'impiego, e questa formola dovrà essere uguale a zero, perchè, secondo il problema, dopo questo tempo il capitale, e i frutti debbono essere consumati dalla multa del Sovrano. Si avrà pertanto la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{a(m+n)^p - x\left\{n\left((m+n)^{p-1} + (m+n)^{p-2}.n + (m+n)^{p-3}.n^2 \ldots + n^{p-1}\right)\right\}}{n^p} = 0$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per n^p. 2.° Si aggiunga tutto il 2.° termine. 3.° Si ordini l'equazione per la x. 4.° Si divida pel coefficiente dell'incognita, e si avrà

$$x = \frac{a(m+n)^p}{n\left((m+n)^{p-1} + (m+n)^{p-2}.n + (m+n)^{p-3}.n^2 \ldots n^{p-1}\right)} \qquad (A)$$

Conclusione

Dunque la multa annua verrà espressa dalla formola (A) trovata per x, che la rappresenta.

Verificazione

Anche di questo problema non daremo la verificazione sulla formola generale per la stessa ragione addotta nel problema antecedente. Ne verificheremo però la soluzione, applicandola ad un caso particolare.

Applicazione

Suppongasi, che Tizio impieghi un capitale di lire cento, fruttante ogni anno l'interesse del dieci per cento in modo, che i frutti vanno a cumulo in capitale. Sino dal primo anno, in cui impiega il capitale, è multato dal Sovrano a pagare ogni anno una somma tolta dal capitale impiegato, il quale perciò scema, e scema negli annui frutti. Dopo quattro anni la multa consuma a Tizio e capitale, e frutti. Quale somma paga annualmente al Sovrano. Si avrà

$$a = 100\,;\ \frac{m}{n} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}\,;\ \text{onde } m = 1\,;\ n = 10\,;\ p = 4$$

Dunque sarà

$$x = \frac{100\,(1+10)^4}{10\left(11^3 + 11^2.10 + 11.10^2 + 10^3\right)} = \frac{10.14641}{1331 + 1210 + 1100 + 1000} = \frac{146410}{4641} = 31{,}547$$

Conclusione

Dunque la multa annua era di lir. 31,547

Verificazione

Si eseguirà la verificazione preso il valore $x = \frac{146410}{4641}$, perchè nella riduzione in decimali essendosi trascurata una, benchè picciolissima, quantità oltre i millesimi, se si volesse la verificazione col valore decimale non si troverebbe esatta. Ciò posto: nel 1.° anno il capitale diverrà di lir. 110, da cui tolta la multa rimarrà

$$110 - \frac{146410}{4641} = \frac{510510 - 146410}{4641} = \frac{364100}{4641}$$

Nel 2.° anno sarà $\frac{364100}{4641} + \frac{1}{10} \times \frac{364100}{4641} = \frac{364100 + 36410}{4641} = \frac{400510}{4641}$

e toltavi la multa resterà $\frac{400510}{4641} - \frac{146410}{4641} = \frac{254100}{4641}$

Nel 3.° anno sarà $\frac{254100}{4641} + \frac{1}{10} \times \frac{254100}{4641} = \frac{254100 + 25410}{4641} = \frac{279510}{4641}$

e toltavi la multa rimarrà $\frac{279510}{4641} - \frac{146410}{4641} = \frac{133100}{4641}$

Nel 4.° anno sarà $\frac{133100}{4641} + \frac{1}{10} \times \frac{133100}{4641} = \frac{133100 + 13310}{4641} = \frac{146410}{4641}$

e toltavi la multa riescirà $\frac{146410}{4641} - \frac{146410}{4641} = 0$

Come doveasi verificare.

Problema XXV.

Un podere, il cui valore in contanti è a si può acquistare pagando un quinto del prezzo in denaro, e gli altri quattro quinti in carta, mentre questa vale lire b per cento. Si domanda qual prezzo debbasi costituire al podere.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il prezzo, che debbasi costituire al podere. Sarà $\frac{x}{5}$ in contanti, e $\frac{4x}{5}$ in carta; onde il valore della carta si avrà dalla proporzione

$$100 : b :: \frac{4x}{5} : 4^{to} = \frac{4bx}{500} = \frac{bx}{125}$$

Se a questo valore si aggiugnerà il denaro sonante avremo il vero prezzo in contanti del podere, e quindi otterrassi la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{x}{5} + \frac{bx}{125} = a$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per 125. 2.° Si sciolga la x ne'suoi fattori. 3.° Si divida per $25 + 6$, e si avrà

$$x = \frac{125a}{25 + b}$$

Conclusione

Dunque il podere dovrà valutarsi lire $\frac{125a}{25 + b}$

Verificazione

$$\frac{1}{5}\left(\frac{125a}{25+b}\right) + \frac{b}{125}\left(\frac{125a}{25+b}\right) = \frac{25}{125}\left(\frac{125a}{25+b}\right) + \frac{b}{125}\left(\frac{125a}{25+b}\right) = \left(\frac{25+b}{125}\right)\left(\frac{125a}{25+b}\right) = a$$

Applicazione

Supponiamo, che la carta vaglia tanto, quanto vale il denaro, per cui si abbia $b = 100$. Sarà

$$x = \frac{125a}{125} = a$$

Conclusione

Dunque il podere non dovrà avere nessun aumento, e dovrà ritenersi a pel suo vero prezzo.

Verificazione

In questo caso infatti valendo la carta tanto, quanto vale il denaro, i quattro quinti in carta si debbono considerare come denaro sonante, e quindi non possono portare differenza alcuna sul prezzo da constituirsi al podere.

Altra Applicazione

Se fosse $a = 100$, e $b = 50$, avremmo $x = \frac{12500}{75} = 166\frac{2}{3}$

Conclusione

Dunque il podere si dovrà valutare lir. $166\frac{2}{3}$, se la carta vale la metà del denaro, cioè lir. 50 al 100.

Verificazione

Infatti; un quinto di $166\frac{2}{3}$ è $33\frac{1}{3}$, che sarà denaro sonante, e quattro quinti di carta del valore di lir. 50 per 100 è lo stesso che due quinti di denaro sonante, ossia nel caso nostro di $66\frac{2}{3}$, che sommati coi $33\frac{1}{3}$ sopra indicati, danno precisamente il valor del podere, ch'è di lir. 100.

Problema XXVI.

Un viaggiatore fece tre viaggi. Nel 1.° moltiplicò per n i suoi denari, e spese q. Nel 2.° guadagnò $\frac{t}{r}$ del denaro residuo dopo il 1.°, e spese f. Nel 3.° guadagnò $\frac{e}{c}$ sul residuo dopo il 2.°, e spese p. Alla fine dei tre viaggi trovossi con lire b. Con quante lire si pose in cammino pel 1.° viaggio.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero delle lire, che aveva, quando partì pel 1.° viaggio. Nel 1.° moltiplicò per n i suoi denari. Dunque alla fine del 1.° avrà avuto nx. Ma spese q. Dunque sarà partito pel 2.° con lire $nx - q$. Nel 2.° guadagnò $\frac{t}{r}(nx - q)$, e spese f. Dunque sarà partito pel 3.° con lire $\frac{t}{r}(nx - q) - f + nx - q$.

Nel 3.° guadagnò $\frac{e}{c}\left\{\frac{t}{r}(nx - q) - f + nx - q\right\}$ e spese p. Dunque dopo il 3.° viaggio avrà avuto lire

$$\frac{t}{r}(nx - q) + nx - q - f + \frac{e}{c}\left(\frac{t}{r}(nx - q) + nx - f - q\right) - p$$

Ma dopo questo viaggio il viaggiatore trovossi con lire b. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{t}{r}(nx-q)+nx-q-f+\frac{e}{c}\left(\frac{t}{r}(nx-q)+nx-f-q\right)-p=b$$

Soluzione

1.° Si eseguiscano le accennate moltipliche. 2.° Si trasportino nel 2.° membro tutti i termini non contenenti la x. 3.° Si moltiplichi per cr. 4.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 5.° Si divida pel suo coefficiente, e ridotta la formola sotto i più semplici fattori riescirà

$$x=\frac{cr(b+q+f+p)+tq(c+e)+er(q+f)}{n(t+r)(c+e)} \qquad (A)$$

Conclusione

Dunque la formola (A) rappresenterà il numero delle lire, con cui il viaggiatore partì pel 1.° viaggio.

Verificazione

Verificheremo questa soluzione non colla formola generale per non estenderci in complicate operazioni, ma coll' applicazione ad un caso particolare.

Applicazione

Si supponga, che nel 1.° viaggio raddoppiasse i suoi denari, e spendesse lire quarantotto; che nel 2.° accrescesse di tre quarti il denaro, che avea dopo il 1.°, e spendesse lire cinquanta; che nel 3.° guadagnasse il venti per cento sul denaro, che avea dopo il 2.°, e spendesse lire sessanta; e che finalmente alla fine del 3.° viaggio si trovasse con lire tre mille seicento ottanta sei. Avrassi

$$n=2;\ q=48;\ t=3;\ r=4;\ f=50;\ e=1;\ c=5;\ p=60;\ b=3686$$

$$\text{Dunque } x=\frac{5.4(3686+48+50+60)+3.48(5+1)+1.4(48+50)}{2(3+4)(5+1)}=\frac{76880+864+392}{84}=930\frac{4}{21}$$

Conclusione

Dunque il viaggiatore sarà partito pel 1.° viaggio con lir. $930\frac{4}{21}$

Verificazione

Nel 1.° raddoppia il denaro. Dunque avrà lir. $1860\frac{8}{21}$. Ma spende lir. 48. Dunque dopo il 1.° viaggio ha lir. $1812\frac{8}{21}$

Nel 2.° guadagna $\frac{3}{4}\left(1812\frac{8}{21}\right) = \frac{5436}{4} + \frac{24}{84} = 1359\frac{2}{7}$. Ma spende lir. 50. Dunque il guadagno netto sarà lir. $1309\frac{2}{7}$, cui aggiunto il denaro residuo dopo il primo viaggio avrà cominciato il terzo con lire $1309\frac{2}{7} + 1812\frac{8}{21} = 3121\frac{98}{147} = 3121\frac{2}{3}$

Nel 3.° guadagna $\frac{1}{5}\left(3121\frac{2}{3}\right) = 624 + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = 624\frac{1}{3}$

Ma spende lir. 60. Dunque il guadagno netto sarà lir. $564\frac{1}{3}$, cui aggiunto il denaro residuo dopo il 2.° viaggio si sarà trovato alla fine del 3.° con lire $564\frac{1}{3} + 3121\frac{2}{3} = 3686$

Problema XXVII.

Un orefice ha due statue d'oro, ed un solo piedestallo. Il peso della minore è d'once m, e col piedestallo pesa l'$n.^{plo}$ della maggiore. La maggiore poi col piedestallo pesa il $q.^{plo}$ della minore. Cercasi il peso del piedestallo

Raziocinio per l'Equazione

Sia once x il piedestallo. La minore, ch'è valutata once m più il piedestallo x essendo l'$n.^{plo}$ della maggiore, si avrà l'espressione $\frac{m+x}{n}$ rappresentante la statua maggiore. Ma la maggiore col piedestallo pesa il $q.^{plo}$ della minore. Dunque sarà essa eguale alla minore moltiplicata per q, meno esso piedestallo. Dunque paragonando queste due espressioni della statua maggiore si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{m+x}{n}=qm-x$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per n. 2.° Si aggiunga nx. 3.° Si sottragga m. 4.° Sciolgansi ambedue i membri ne' loro fattori. 5.° Si divida per $n+1$, e si avrà

$$x=\frac{m(qn-1)}{n+1}$$

Conclusione

Dunque il piedestallo peserà once $\frac{m(qn-1)}{n+1}$

Verificazione

La prima espressione della statua maggiore sarà

$$\frac{m}{n}+\frac{m(qn-1)}{n(n+1)}=\frac{mn+m+mqn-m}{n(n+1)}=\frac{mn+mqn}{n(n+1)}=\frac{m(q+1)}{n+1}=(\varphi)$$

E similmente la 2.ª espressione della statua maggiore riescirà

$$qm-\frac{m(qn-1)}{n+1}=\frac{qmn+qm-qmn+m}{n+1}=\frac{qm+m}{n+1}=\frac{m(q+1)}{n+1}=(\varphi)$$

Applicazione

Supponiamo once quindici il peso della statua minore, e col piedestallo pesi il doppio della maggiore; e la maggiore col piedestallo pesi il triplo della minore. Avremo

$$m=15;\ n=2;\ q=3$$

Dunque $x=15\left(\frac{3.2-1}{2+1}\right)=\frac{15.5}{3}=\frac{3.5.5}{3}=25$

Conclusione

Dunque il piedestallo pesava once 25

Verificazione

La statua minore col piedestallo dà il peso d'once 40. Ma con questo piedestallo essa pesa il doppio della maggiore. Dunque la mag-

giore peserà once 20; e pesando once 20 col piedestallo ne peserà 45, ch'è precisamente il triplo di 15.

Problema XXVIII.

Sforzavasi un sofista di provare, che $2 + 3$ non fanno 5 con questo ragionamento. Io ho comperati de' fiori: una metà l'ho avuta, pagando una lira ogni due fiori; e l'altra metà, pagando una lira ogni tre fiori. Dunque ho pagato due lire ogni cinque fiori; eppure nel rivenderli, ricevendo questo prezzo, io perdo una lira. Donde nasce il sofisma, e quanti fiori aveva comperati il sofista.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero de' fiori comperati dal sofista. L'una metà verrà espressa da $\frac{x}{2}$, e l'altra parimenti da $\frac{x}{2}$. Il valore della 1.ª metà è $\frac{x}{4}$ pagando una lira ogni due fiori, e il valore della 2.ª è $\frac{x}{6}$ pagando una lira ogni tre fiori. Vendendoli poi a due lire ogni cinque fiori, il denaro ricevuto sarà $\frac{2x}{5}$. Ma in questo caso il denaro ricevuto per condizione del problema è minore d'una lira del denaro, che il sofista ha sborsato nella sua compera. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{2x}{5} + 1 = \frac{x}{4} + \frac{x}{6}$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi l'equazione per $5.4.6$. 2.° Si sottragga $48x$. 3.° Si ordini l'equazione per x, e si divida per 2, sarà

$$x = \frac{120}{2} = 60$$

Conclusione

Dunque i fiori comperati dal sofista erano 60. Come si spieghi il sofisma lo vedremo più sotto.

VERIFICAZIONE

Prima metà N.° 30 a lir. 1 ogni due fiori . . . . . lir. 15
Seconda metà N.° 30 a lir. 1 ogni tre fiori . . . . . » 10

Denaro sborsato dal sofista . . . lir. 25

Nella vendita poi di 60 fiori a lir. 2 ogni cinque egli riceverà lir. $\frac{2 \cdot 60}{5} = \frac{120}{5} = 24$ cioè una lira di meno del denaro sborsato.

Il sofisma poi facilmente si spiega così: riunendo i fiori comperati per una lira ogni due con quelli comperati per una lira ogni tre, finiscono prima i ternarj, che i binarj, essendo i fiori in ambedue le compere eguali di numero, per cui rivende gli altri ad un prezzo minore, mentre li ha comperati ad un maggiore.

Per conoscere meglio la cosa possiamo osservare la seguente tavola

		Prima Metà	*Seconda Metà*
Nella rivendita *A* forma 10 quinarj di fiori, che rendono lir. 20.	*A*	2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
			30
B forma 2 quinarj di fiori, che rendono lir. 4.	*B*	2	
		2	
		2	
		2	
		2	
		30	

PROBLEMA XXIX.

Un Signore manda il suo famiglio ad una vigna, perchè gli porti due pomi. Per andarvi si pagano tre pedaggi. La guardia del 1.° esige

la metà de' pomi colti più tre pomi; quella del 2.° vuole la metà del residuo più due pomi; e quella del 3.° vuole essa pure la metà del residuo, ed un pomo di più. Conscio il famiglio di questi pesi, quanti pomi avrà colti per recarne due al suo padrone.

Raziocinio per l'Equazione

Si supponga x il numero de' pomi colti dal famiglio.

Dopo il 1.° pedaggio avrà pomi. . . . . $\frac{x}{2} - 3$

Dopo il 2.° . . . . . $\frac{x}{4} - \frac{3}{2} - 2 = \frac{x - 14}{4}$

Dopo il 3.° . . . . . $\frac{x - 14}{8} - 1 = \frac{x - 22}{8}$

Ma questo residuo debb' essere eguale a due per condizione del problema. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{x - 22}{8} = 2$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per 8. 2.° Si aggiunga 22, e si avrà

$$x = 38$$

Conclusione

Dunque il famiglio avrà colti pomi 38

Verificazione

Metà de' pomi colti $\frac{38}{2} = 19$ . . . Residuo dopo il 1.° pedaggio $19 - 3 = 16$

Metà del 1.° residuo $\frac{16}{2} = 8$ . . . Residuo dopo il 2.° . . . . $8 - 2 = 6$

Metà del 2.° residuo $\frac{6}{3} = 3$ . . . Residuo dopo il 3.° . . . . $3 - 1 = 2$

Problema XXX.

Un Signore passando per una campagna vide su d'una pianta molti augelletti, e prese a salutarli, dicendo loro: addio i miei cento begli

augelletti. Ma essi risposero: v'ingannate, o Signore, noi non siamo cento: lo saremmo, quando fossimo due volte tanti quanti pur siamo, più la metà di questo doppio, e quando voi pure foste un augello. Quanti erano.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero degli augelletti. Il doppio della x, più la metà del doppio, cioè più la stessa x, più uno debbono far cento. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$2x + x + 1 = 100$$

Soluzione

1.° Si sommino le x. 2.° Si sottragga 1. 3.° Si divida per 3, e si avrà

$$x = 33$$

Conclusione

Dunque gli augelletti erano 33.

Verificazione

Doppio di 33	N.°	66
Metà del doppio	«	33
Il Signore	«	1
Totale . .	N.°	100

Problema XXXI.

Una persona interrogata sulla sua età, risponde: se dal triplo degli anni miei si leveranno 16 anni, avrassi un numero, che sarà tanto al disopra di 100, quanto n'è al disotto la mia età. Quanti anni aveva.

Raziocinio per l'Equazione

Questo problema facilissimo, come ognun vede, riducesi a trovare un numero, il cui triplo meno sedici di tante unità sorpassi il cento

di quante il cento sorpassa il numero cercato; onde fatto x questo numero si avrà la proporzione aritmetica

$$3x - 16 : 100 :: 100 : x$$

dalla quale, fatta la somma de' medj, e quella degli estremi, si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$4x - 16 = 200$$

Soluzione

1.° Si aggiunga 16. 2.° Si divida per 4, e si avrà

$$x = 54$$

Conclusione

Dunque l' età cercata sarà d'anni 54

Verificazione

Il triplo di 54 è 162, da cui tolto 16, resta 146, numero, che di 46 unità supera il 100, come di 46 unità n' è al disotto il numero istesso 54

Problema XXXII.

Achille va 1000 volte più veloce della tartaruga, che lo precede d'una lega. Dove Achille la raggiugnerà.

Raziocinio per l' Equazione

Chiamato x lo spazio espresso per leghe, che deve percorrere Achille prima di raggiugnere la tartaruga, questa percorrerà leghe $x - 1$. Instituita quindi una proporzione tra lo spazio percorso da ambedue, e le loro velocità, avrassi

$$x : x - 1 :: 1000 : 1$$

da cui, fatto il prodotto degli estremi, e de' medj, si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$1000x - 1000 = x$$

Soluzione

1.° Si aggiunga 1000. 2.° Si sottragga x. 3.° Si divida per 999, e sarà

$$x = 1\frac{1}{999}$$

Conclusione

Dunque Achille raggiugnerà la tartaruga dopo una lega, e 999 millesimi di lega.

Verificazione

Mentre Achille fa una lega, la tartaruga avente un millesimo di velocità riferita a quella, che ha Achille, farà un millesimo di lega. Mentre Achille fa questo millesimo, la tartaruga ne farà un millionesimo, e così successivamente proseguendo per una serie infinita di termini, che ha un millesimo per rapporto. Ma in questa serie la somma di tutti i termini è rappresentata dalla formola $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$ (Vedi Elem. di Alg. e Geometria del Cav. Brunacci ad uso de' Licei n.° 258 pag. 116 ediz.ᵉ 1.ª), che nel nostro caso diventa $s = \frac{-a}{q-1} = \frac{a}{1-q}$, perchè ωq svanisce, essendo la serie infinita. Dunque sostituiti i valori corrispondenti la somma di tutti i termini sarà

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{1}{\frac{1000 - 1}{1000}} = \frac{1000}{999} = 1\frac{1}{999}$$

e quindi sarà verificato, che Achille raggiugnerà la tartaruga dopo avere percorso lo spazio di una lega, e novecento novantanove millesimi di lega.

Problema XXXIII.

Un guascone dice d'avere in tasca tante lire, che spendendone tre quarti meno sessanta gliene restano ancora ottanta. Quante lire ha.

Raziocinio per l'Equazione

Supponiamo, che abbia lire x. Le spese cioè $\frac{3x}{4}$ meno 60, più il residuo 80 dovendo eguagliare il totale del denaro, si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$x = \frac{3x}{4} - 60 + 80$$

Soluzione

1.° Si riducano le quantità note. 2.° Si moltiplichi per 4. 3.° Si sottragga $3x$, e sarà

$$x = 80$$

Conclusione

Dunque il guascone aveva lir. 80, e nulla spendeva.

Verificazione

Infatti, spendendo egli $\frac{3}{4}$ di 80, spenderebbe lir. 60. Ma dice di spendere questo denaro meno lir. 60. Dunque nulla spendeva.

Problema XXXIV.

Se da una quantità si sottrae la di lei metà, ed uno di più: da quello, che rimane se si sottrae pure la metà, ed uno di più; e di questo residuo se si prende ancora la metà, ed uno di più; e trovasi, che l'ultimo residuo è uguale all'unità, trovare la quantità prima.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x la prima quantità, che si cerca. La sua metà accresciuta di uno sarà $\frac{x}{2} + 1 = \frac{x+2}{2}$. Sottratta da x questa quantità, avrassi

$$x - \left(\frac{x+2}{2}\right) = \frac{2x - x - 2}{2} = \frac{x-2}{2} \qquad (\varphi)$$

La metà di (φ) accresciuta di uno sarà

$$\frac{x-2}{4} + 1 = \frac{x-2+4}{4} = \frac{x+2}{4}$$

Questa quantità sottratta da (φ) darà il residuo

$$\frac{x-2}{2} - \left(\frac{x+2}{4}\right) = \frac{2x-4-x-2}{4} = \frac{x-6}{4} \qquad (\varphi')$$

La metà del residuo (φ') accresciuta di uno sarà

$$\frac{x-6}{8}+1=\frac{x-6+8}{8}=\frac{x+2}{8}$$

Tolta questa quantità da (φ') resterà

$$\frac{x-6}{4}-\left(\frac{x+2}{8}\right)=\frac{2x-12-x-2}{8}=\frac{x-14}{8}$$

Ma quest' ultimo residuo debb' essere uguale all' unità per condizione del problema. Dunque avrassi la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{x-14}{8}=1$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per 8. 2.° Si aggiunga 14, e sarà

$$x=22$$

Conclusione

Dunque la prima quantità cercata è 22

Verificazione

$\frac{22}{2}=11$; $11-1=10$ 1.° residuo

$\frac{10}{2}=5$; $5-1=4$ 2.° residuo

$\frac{4}{2}=2$; $2-1=1$ ultimo residuo

Problema XXXV.

Diofanto passò nell' adolescenza la sesta parte di sua vita, ed una duodecima nella giovinezza. Si ammogliò, e visse ammogliato la settima parte di sua vita prima d' avere un figlio, cui sopravisse quattro anni, non avendo vissuto il figlio, che la metà degli anni vissuti dal padre. Quanti anni visse Diofanto.

Raziocinio per l' Equazione

Sia vissuto Diofanto anni x. La sesta parte di sua vita, cioè $\frac{x}{6}$;

la duodecima $\frac{x}{12}$; la settima più cinque anni $\frac{x}{7} + 5$; la metà, ch'era l'età del figlio $\frac{x}{2}$; più i quattro anni dal padre vissuti senza il figlio; tutte queste quantità sommate debbono darci la totale età di Diofanto. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per 12, e poscia per 7. 2.° Si sommino i termini contenenti la x. 3.° Si sottragga $75x$. 4.° Si divida per 9, e sarà

$$x = 84$$

Conclusione

Dunque Diofanto visse 84 anni.

Verificazione

$\frac{84}{6}$	14
$\frac{84}{12}$	7
$\frac{84}{7} + 5$	17
$\frac{84}{2} + 4$	46
Età trovata di Diofanto	84

Problema XXXVI.

Si hanno a dividere in tre persone lir. 420 per modo, che la parte del 1.° stia a quella del 2.° :: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} : \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$, e la stessa parte del 1.° stia a quello del 3.° :: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} : \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$. Quanto toccherà a ciascuno.

Raziocinio per l' Equazione

Sia x la parte del 1.° Si otterrà facilmente quella del 2.° dalla proporzione, che ci fornisce la 1.ª condizione del problema

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}:\frac{1}{4}+\frac{1}{5}::x:2.^{\circ}$$

e semplificando . . . . $\frac{7}{12}:\frac{9}{20}::x:2.^{\circ}=\frac{\frac{9x}{20}}{\frac{7}{12}}=\frac{27x}{35}$

E la parte, che tocca al 3.° si avrà da quest' altra proporzione

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}:\frac{1}{5}+\frac{1}{6}::x:3.^{\circ}$$

e semplificando . . . . $\frac{7}{12}:\frac{11}{30}::x:3.^{\circ}=\frac{\frac{11x}{30}}{\frac{7}{12}}=\frac{22x}{35}$

Ma queste tre parti sommate insieme debbono essere uguali a 420. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$x+\frac{27x}{35}+\frac{22x}{35}=420$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per 35. 2.° Si sommino le x. 3.° Si divida per 84, e sarà

$$x=175$$

Conclusione

Dunque al 1.° toccheranno . . . . . lir. 175

Al 2.° lire $\frac{27\cdot175}{35}=\frac{4725}{35}$, ossia . . . . . » 135

Al 3.° lire $\frac{22\cdot175}{35}=\frac{3850}{35}$, ossia . . . . . » 110

Somma per verificazione . . . . lir. 420

Problema XXXVII.

Distribuire 21375 cartocce da fucile a tre distaccamenti, le cui forze sono proporzionali ai numeri 3, 5, 11.

Raziocinio per l'Equazione

Questi tre distaccamenti, le cui forze sono proporzionali ai numeri 3, 5, 11 si possono esprimere anche così, ch' è poi lo stesso: cioè il 1.° è $\frac{3}{5}$ del 2.° e $\frac{3}{11}$ del 3.° Ciò posto sia $3x$ il numero delle cartocce, che deve avere il 1.° distaccamento; sarà $5x$ quello delle cartocce pel 2.°; e $11x$ pel 3.°: poichè $\frac{3}{5}$ di $5x$ è $3x$, e $\frac{3}{11}$ di $11x$ è parimenti $3x$. Ma queste tre parti debbono formare il totale delle cartocce, cioè 21375. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$3x + 5x + 11x = 21375$$

Soluzione

1.° Si sommino le x. 2.° Si divida per 19, e sarà

$$x = 1125$$

Conclusione

Dunque al 1.° distaccamento si daranno cartocce .	3 . 1125 =	3375
Al 2.°	5 . 1125 =	5625
Al 3.°	11 . 1125 =	12375
Somma per verificazione		21375

Problema XXXVIII.

Vi ha un numero composto di due cifre, la cui somma, prese le cifre isolate, è sette; e se al numero totale si aggiugne il ventisette si ottiene un numero composto delle stesse cifre, ma scritte con ordine inverso. Cercasi il numero.

Raziocinio per l' Equazione

Rappresenti x la cifra esprimente le decine del numero cercato. L' espressione delle unità dovrà essere $7-x$, e dato il valore di posizione alle due espressioni tutto il numero verrà rappresentato da $10x+7-x$, ossia $9x+7$. Nella 2.ª disposizione l' espressione delle decine sarà invece $7-x$, e quella delle unità sarà x, onde il numero in questo caso sarà espresso da $70-10x+x$, ossia $70-9x$. Ma a questo numero è uguale il primo, se vi si aggiugne il 27. Dunque avrassi la seguente

Equazione del Problema

$$9x+7+27=70-9x$$

Soluzione

1.° Si aggiunga $9x$. 2.° Si sottragga 34. 3.° Si divida per 18, e sarà

$$x=2$$

Conclusione

Dunque la cifra rappresentante le decine sarà 2, e quella rappresentante le unità sarà $7-2=5$; conseguentemente il chiesto numero sarà il 25

Verificazione

1.° Le due cifre del numero 25 prese isolatamente danno 7. 2.° Al 25 aggiunto il 27 si ha 52, ch' è lo stesso 25 scritto con ordine inverso.

Problema XXXIX.

Dividere il 48 in 9 parti tali, che l' una sia sempre maggiore della sua precedente di un mezzo.

Raziocinio per l' Equazione

Sia x la parte più piccola. La susseguente sarà $x+\frac{1}{2}$. La 3.ª $x+1$, e così successivamente. Ora queste parti formano una progressione aritmetica, il cui primo termine è x, l' ultimo termine è $x+4$, e 9 è il numero de' termini. Ma per la teorica delle proporzioni (vedi Elem. citati di

Algebra N.° 213. pag. 107) la somma de' termini di questa proporzione è uguale alla somma del 1.°, e dell' ultimo termine moltiplicata per la metà del numero de' termini. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$(2x+4)\frac{9}{2}=48$$

Soluzione

1.° Si eseguisca l' accennata moltiplica. 2.° Sottraggasi 18. 3.° Si divida per 9, e sarà

$$x=3\frac{1}{3}$$

Conclusione

Dunque la prima parte sarà $3\frac{1}{3}$, e tutte le parti saranno

$$3\frac{1}{3};3\frac{5}{6};4\frac{1}{3};4\frac{5}{6};5\frac{1}{3};5\frac{5}{6};6\frac{1}{3};6\frac{5}{6};7\frac{1}{3}$$

Verificazione

La somma di tutti gli interi è $3+3+4+4+5+5+6+6+7=43$

La somma de' rotti è $\frac{5}{3}+\frac{20}{6}=\frac{10+20}{6}=\frac{30}{6}=5$

Conseguentemente abbiamo $43+5=48$, il qual numero è stato diviso in 9 parti l' una maggiore dell' altra di un mezzo.

Problema XL.

Interrogata una persona qual giorno corresse del mese, rispose: la quarta parte dei giorni trascorsi dal principio del mese equivale alla sesta di quelli, che rimangono al suo termine. Qual giorno correva.

Raziocinio per l' Equazione

Sieno x i giorni trascorsi. Preso il mese astronomico, che si computa di giorni 30, i giorni residui saranno $30-x$. Ma il quarto de' giorni trascorsi debb' essere uguale al sesto de' residui. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{x}{4} = \frac{30 - x}{6}$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per 24. 2.° Si aggiunga $4x$. 3.° Si divida per 10, e si avrà

$$x = 12$$

Conclusione

Dunque correva il giorno duodecimo del mese.

Verificazione

I giorni, che mancavano alla fine erano 18, la cui sesta parte è 3, eguale precisamente alla quarta parte de' giorni trascorsi, che sono 12.

PROBLEMI DI PRIMO GRADO A PIÙ INCOGNITE

Problema XLI.

Un pezzo di cannone composto di rame, e di stagno pesa denari m, e contiene un volume n di palmi cubici. Si suppone, che il palmo cubico di rame pesi denari p, e che il palmo cubico di stagno ne pesi q. In qual modo si può precisare la quantità del rame, e dello stagno, che si ha nel misto.

Raziocinio per le Equazioni

Sieno x i palmi cubici di rame, y quelli di stagno. I due volumi debbono essere uguali a palmi cubici n. Dunque si avrà la seguente

I.ª Equazione del Problema

$$x+y=n$$

Il peso de' primi si otterrà chiaramente dalla proporzione $1:p::x:4.^{to}=px$; quindi quello de' secondi sarà qy. Ma questi due pesi debbono formare un peso totale di denari m. Dunque si avrà la seguente

II.ª Equazione del Problema

$$px+qy=m$$

Soluzione

1.° Si sottragga y nella 1.ª equazione. 2.° Nella 2.ª si sottragga qy, e si divida per p, e si avrà

$$(\varphi) \qquad x=n-y \qquad\qquad (\varphi') \qquad x=\frac{m-qy}{p}$$

3.° Si paragoni (φ) con (φ'). 4.° Si moltiplichi per p. 5.° Si aggiunga py, e si sottragga m. 6.° Si sciolga la y ne' suoi fattori. 7.° Si divida per $p-q$, e si avrà la 2.ª incognita

$$y=\frac{np-m}{p-q}$$

8.° Questo valore sostituiscasi in (φ), e si otterrà la 1.ª incognita

$$x=n-\left(\frac{np-m}{p-q}\right)=\frac{pn-qn-pn+m}{p-q}=\frac{m-qn}{p-q}$$

Conclusione

Dunque entreranno nel misto palmi cubici di rame $\frac{m-qn}{p-q}$, e di stagno $\frac{np-m}{p-q}$

Verificazione

1.° I due volumi ci debbono dare un volume totale n, ed è infatti

$$\frac{m-qn}{p-q}+\frac{np-m}{p-q}=\frac{np-qn}{p-q}=n\left(\frac{p-q}{p-q}\right)=n$$

2.° I due pesi debbono essere m, e sommando il peso del rame, ch' è $p\left(\frac{m-qn}{p-q}\right)$ col peso dello stagno, ch' è $q\left(\frac{np-m}{p-q}\right)$ si ha

$$p\left(\frac{m-qn}{p-q}\right)+q\left(\frac{np-m}{p-q}\right)=\frac{mp-pqn+pqn-mq}{p-q}=\frac{mp-mq}{p-q}=m\left(\frac{p-q}{p-q}\right)=m$$

Applicazione

Suppongasi un pezzo di cannone da 16, che pesi denari 2010640, e contenga 223 palmi cubici. Il palmo cubico di rame pesi denari 9250, e 7320 ne pesi il palmo cubico di stagno. Avrassi

$$m = 2010640 \,;\, n = 223 \,;\, p = 9250 \,;\, q = 7320$$

$$\text{Dunque } x = \frac{2010640 - 223 \,.\, 7320}{9250 - 7320} = \frac{2010640 - 1632360}{9250 - 7320} = \frac{378280}{1930} = 196$$

$$y = \frac{223 \,.\, 9250 - 2010640}{9250 - 7320} = \frac{2062750 - 2010640}{9250 - 7320} = \frac{52110}{1930} = 27$$

Conclusione

Dunque entreranno nel cannone palmi cubici 196 di rame, e 27 di stagno.

Verificazione

1.° I due volumi danno infatti . . $196 + 27 = 223$
2.° Peso del rame è . . . . . den. $196 \,.\, 9250 = 1813000$
Quello dello stagno. . . . . den. $27 \,.\, 7320 = 197640$
Totale di peso den. 2010640

Problema XLII.

Si vuole un metallo, che costi lir. a all'oncia composto d'un metallo, che costi lir. p, e d'un altro, che costi lir. q. Quanto dell'uno, e dell'altro si dovrà impiegare nel misto.

Raziocinio per le Equazioni

Esprima x il peso della porzione del 1.° metallo, ed y quello della porzione del 2.°, e l'oncia venga rappresentata dall'unità. Poichè i due pesi debbono formare l'unità, avrassi la seguente

I.ª Equazione del Problema

$$x + y = 1$$

Il valore del peso x, come si è osservato nel problema anteceden-

te sarà px; quello del peso y, sarà qy. Ma questi due valori debbono formare lir. a. Dunque si otterrà la seguente

II.ª Equazione del Problema

$$px + qy = a$$

Soluzione

Per la soluzione si confrontino queste due equazioni colle due del problema antecedente, e dovremo sostituire nelle formole trovate per x, e per y le quantità $n = 1$, $m = a$, e ritenere a suo luogo la espressione q, per cui sarà

$$x = \frac{a-q}{p-q} \quad . \qquad\qquad y = \frac{p-a}{p-q}$$

e cambiati i segni alle frazioni $x = \frac{q-a}{q-p}$; $y = \frac{a-p}{q-p}$

Conclusione

Dunque del 1.° metallo s'impiegheranno parti $\frac{q-a}{q-p}$, e del 2.° $\frac{a-p}{q-p}$

Verificazione

1.° I due pesi debbono fare 1. Ed è infatti $\frac{q-a}{q-p} + \frac{a-p}{q-p} = \frac{q-p}{q-p} = 1$

2.° I due valori devono dare a, e si ha

$$p\left(\frac{q-a}{q-p}\right) + q\left(\frac{a-p}{q-p}\right) = \frac{pq - ap + aq - pq}{q-p} = \frac{aq-ap}{q-p} = a\left(\frac{q-p}{q-p}\right) = a$$

Applicazione

Sia il misto di lir. 60 all'oncia. Il 1.° metallo costi lir. 15, e il 2.° lir. 80. Avrassi

$$a = 60 \; ; \; p = 15 \; ; \; q = 80$$

Dunque sarà. . . . . $x = \frac{80-60}{80-15} = \frac{20}{65} = \frac{4}{13}$

$$y = \frac{60-15}{80-15} = \frac{45}{65} = \frac{9}{13}$$

Conclusione

Dunque del 1.° metallo s'impiegheranno quattro tredicesimi d'oncia, e nove del 2.°

Verificazione

1.° Il loro peso è $\frac{4}{13}+\frac{9}{13}=\frac{13}{13}=1$

2.° Il valore di $\frac{4}{13}$ a lir. 15 all'oncia sarà . . . . . lir. $15\times\frac{4}{13}=\frac{60}{13}$

Quello di $\frac{9}{13}$ a lir. 80 . . . . . lir. $80\times\frac{9}{13}=\frac{720}{13}$

E sommando abbiamo $\frac{60+720}{13}=\frac{780}{13}=60$

Problema XLIII.

Quanti anni hai tu domanda Tizio a Cajo. Egli risponde: q anni sono aveva un'età $m.^{pla}$ della tua: dopo anni q diventerà $n.^{pla}$ Quanti anni avevano ambedue.

Raziocinio per le Equazioni

Cajo abbia anni x, e Tizio y. Anni q indietro Cajo aveva anni $x-q$, e Tizio $y-q$. Ma q anni sono l'età di Cajo era $m.^{pla}$ di quella di Tizio. Dunque si avrà la seguente

I.ª Equazione del Problema

$$x-q=m(y-q)$$

Dopo anni q l'età di Cajo sarà $x+q$, e quella di Tizio $y+q$. Ma dopo questi anni l'età del 1.° debb'essere $n.^{pla}$ di quella del 2.° Dunque si avrà la seguente

II.ª Equazione del Problema

$$x+q=n(y+q)$$

Soluzione

1.° Si aggiunga q nella 1.ª 2.° Si sottragga q nella 2.ª, e si avrà

$$(\varphi) \quad x = m(y - q) + q \qquad\qquad (\varphi') \quad x = n(y + q) - q$$

3.° Si paragoni (φ) con (φ'), e coll'andamento del problema 41.° si otterrà

$$x = q\left(\frac{2m(n-1)}{m-n} + 1\right) \qquad y = q\left(\frac{m+n-2}{m-n}\right)$$

Conclusione

Dunque Cajo aveva anni $q\left(\frac{2m(n-1)}{m-n} + 1\right)$, e Tizio $q\left(\frac{m+n-2}{m-n}\right)$

Verificazione

Sostituiti i valori della x, e della y in una delle due equazioni del problema, se questi valori sono esatti, dovrassi avere un'equazione identica. Presa infatti la prima si ha

$$q\left(\frac{2m(n-1)}{m-n} + 1\right) - q = m\left(q\left(\frac{m+n-2}{m-n}\right) - q\right)$$

Moltiplicando tutta l'equazione per $m - n$, e fatte le debite riduzioni sarà

$$m\Big(2q(n-1)\Big) = m\Big(q(m+n-2)\Big) - mq(m-n)$$

Dividendo per m si avrà

Pel 1.° membro . . . . . $2q(n-1)$

E pel 2.° $q(m+n-2) - q(m-n) = qm + qn - 2q - qm + qn = 2qn - 2q = 2q(n-1)$

Applicazione

Suppongasi, che Cajo rispondesse: sei anni sono n'ebbi il triplo de' tuoi; dopo sei anni avronne il doppio. Sarebbe

$$q = 6\,;\ m = 3\,;\ n = 2$$

Dunque $x = 6\left(\frac{3.2(2-1)}{3-2} + 1\right) = 6(6+1) = 6.7 = 42$

$$y = 6\left(\frac{3+2-2}{3-2}\right) = 6.3 = 18$$

Conclusione

Dunque l'età di Cajo sarà d'anni 42, e quella di Tizio d'anni 18

Verificazione

1.° Sei anni sono Cajo aveva anni 36, e Tizio 12; dove si verifica l'età del 1.° tripla di quella del 2.°

2.° Sei anni dopo Cajo avrà anni 48, e Tizio 24; dove si verifica l'età del 1.° doppia di quella del 2.°

Problema XLIV.

Un negoziante mette in società l'$n.^{plo}$ di un altro, e di più il proprio personale, che per convenzione gli frutta $\frac{1}{m}$ sul guadagno totale. Come tra i due socj dividerassi il guadagno.

Raziocinio per le Equazioni

Il guadagno totale sia ω. La parte del guadagno, che tocca al 1.° negoziante, il quale ha posto in società l'$n.^{plo}$, ed il proprio personale si esprima per x, e per y quella dell'altro. Queste due parti debbono assorbire tutto il guadagno. Dunque avrassi la seguente

I.ª Equazione del Problema

$$x + y = \omega$$

Per ottenere la 2.ª equazione si osservi, che il 1.° negoziante deve guadagnare l'$n.^{plo}$ dell'altro, cioè ny, e per il suo personale $\frac{1}{m}$ del guadagno totale, cioè $\frac{\omega}{m}$. Avremo dunque la seguente

II.ª Equazione del Problema

$$x = ny + \frac{\omega}{m}$$

Soluzione

1.° Nella 1.ª si sottragga ny, e le due equazioni diventeranno

$$x + y = \omega \qquad\qquad x - ny = \frac{\omega}{m}$$

2.° Si paragonino queste equazioni colle due del problema 41.°, e collo stesso andamento si otterrà

$$x = \frac{\omega(mn+1)}{m(n+1)} \qquad y = \frac{\omega(m-1)}{m(n+1)}$$

Conclusione

Dunque la parte del guadagno, che tocca al 1.° negoziante è $\frac{\omega(mn+1)}{m(n+1)}$

E quella, che tocca al 2.° . . . . . $\frac{\omega(m-1)}{m(n+1)}$

Verificazione

1.° Le due parti debbono formare ω, ed è infatti

$$\frac{\omega(mn+1)}{m(n+1)} + \frac{\omega(m-1)}{m(n+1)} = \frac{\omega mn + \omega + \omega m - \omega}{m(n+1)} = \frac{\omega\big(m(n+1)\big)}{m(n+1)} = \omega$$

2.° La parte del 2.° $n.^{plicata}$ darà $\frac{n\omega(m-1)}{m(n+1)}$, e aggiunta a questa parte la quantità $\frac{\omega}{m}$, avremo

$$\frac{n\omega(m-1)}{m(n+1)} + \frac{\omega}{m} = \frac{n\omega(m-1) + \omega n + \omega}{m(n+1)} = \frac{\omega nm - \omega n + \omega n + \omega}{m(n+1)} = \frac{\omega nm + \omega}{mn+1} = \frac{\omega(mn+1)}{m(n+1)}$$

ch' è la parte del primo negoziante superiormente trovata.

Applicazione

Sia il totale guadagno di lir. 3431. Suppongasi, che il 1.° negoziante metta in società il triplo dell' altro, e che pel suo personale gli si debba un ventesimo del totale guadagno. Avremo

$$\omega = 3431 \; ; \; m = 20 \; ; \; n = 3$$

Dunque $x = \frac{3431(60+1)}{20(3+1)} = \frac{3431 \cdot 61}{20 \cdot 4} = \frac{209291}{80} = 2616{,}1375$

$y = \frac{3431(20-1)}{20(3+1)} = \frac{3431 \cdot 19}{80} = \frac{65189}{80} = 814{,}8625$

Conclusione

Dunque al 1.° negoziante toccheranno lir. 2616,1375
Ed al 2.° . . . . . » 814,8625

Verificazione

1.° I due guadagni sommati danno il guadagno totale lir. 3431. 2.° Il guadagno del 2.° triplicato sarà lir. 2444,5875. Unitovi un ventesimo di lir. 3431, cioè lir. 171,55 si hanno lir. 2616,1375, ch' è la parte del 1.° negoziante.

Problema XLV.

Trovare due quantità, di cui sia data la somma, e la differenza.

Raziocinio per le Equazioni

Sia a la somma, b la differenza. La quantità maggiore x, la minore y. Eseguendo la somma, e la sottrazione accennata avremo le seguenti

Equazioni del Problema

1.ª $x+y=a$
2.ª $x-y=b$

Soluzione

1.° Si sommino le due equazioni. 2.° Si divida per 2, e sarà

$$x=\frac{a+b}{2}$$

3.° Si sottragga la 2.ª alla 1.ª 4.° Si divida per 2, e si avrà

$$y=\frac{a-b}{2}$$

Conclusione

Dunque la quantità maggiore sarà $\frac{a+b}{2}$, e la minore $\frac{a-b}{2}$

Verificazione

1.° Si sommino le quantità, ed avrassi $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=\frac{2a}{2}=a$. Somma data

2.° Si sottragga la minore alla maggiore, e sarà $\frac{a+b}{2}-\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{2b}{2}=b$. Differenza data

Applicazione

Una casa di due piani ha 35 metri di altezza, e il 1.° piano è di 4 metri più alto del 2.° Si cerca l'altezza dei due piani. Avrassi

$$a = 35 \; ; \; b = 4$$

Sarà conseguentemente . . . . . $x = \frac{35 + 4}{2} = \frac{39}{2} = 19, 5$

$$y = \frac{35 - 4}{2} = \frac{31}{2} = 15, 5$$

Conclusione

Dunque il 1.° piano è alto metri 19, e palmi 5; ed il 2.° metri 13, e palmi 5.

Verificazione

1.° Somma de' piani	1.°	Met. 19, 5
	2.°	Met. 15, 5
Totale altezza		Met. 35. —

2.° E la differenza, che passa tra questi due piani è precisamente di 4 metri.

Problema XLVI.

Un orefice comperò un misto d'once m d'oro, ed n d'argento al prezzo c; un' altra volta comperò un misto d'once q d'oro, e p d'argento al prezzo d. Si domanda quanto abbia pagato all'oncia l'oro, e l'argento.

Raziocinio per le Equazioni

Chiamisi x il valore di un' oncia d'oro, ed y quello di un' oncia d'argento. Once m d'oro costeranno mx, ed once n d'argento ny. Similmente once q d'oro costeranno qx, ed once p d'argento py. Esprimendo le due somme di spesa, ed eguagliandole al valore del nostro problema, si otterranno le seguenti

Equazioni del Problema

1.ª $mx + ny = c$

2.ª $qx + py = d$

Soluzione

Sciolte queste equazioni come al problema 41.° si otterrà

$$x = \frac{dn - cp}{nq - pm} \qquad y = \frac{cq - dm}{nq - pm}$$

Conclusione

Dunque l'orefice avrà pagato l'oro $\frac{dn - cp}{nq - pm}$ all'oncia, e $\frac{cq - dm}{nq - pm}$ l'argento.

Verificazione

1.° Le once m d'oro varranno $m\left(\frac{dn - cp}{nq - pm}\right)$, e le once n d'argento $n\left(\frac{cq - dm}{nq - pm}\right)$

Questi due valori ci debbono formare un valore totale c, ed è infatti

$$m\left(\frac{dn - cp}{nq - pm}\right) + n\left(\frac{cq - dm}{nq - pm}\right) = \frac{mdn - mcp + ncq - mdn}{nq - pm} = c\left(\frac{nq - pm}{nq - pm}\right) = c$$

2.° Similmente proverebbesi la 2.ª condizione del problema.

Applicazione

Supponiamo, che nella 1.ª compera spendesse lir. 318, e comperasse once 3 d'oro, e 5 d'argento; e nella 2.ª spendesse lir. 522, e comperasse once 5 d'oro, e 7 d'argento. Si avrebbe

$$m = 3\,;\ n = 5\,;\ c = 318\,;\ q = 5\,;\ p = 7\,;\ d = 522$$

Dunque $x = \frac{522 \,.\, 5 - 318 \,.\, 7}{5 \,.\, 5 - 7 \,.\, 3} = \frac{2610 - 2226}{25 - 21} = \frac{384}{4} = 96$

$$y = \frac{5 \,.\, 318 - 522 \,.\, 3}{5 \,.\, 5 - 7 \,.\, 3} = \frac{1590 - 1566}{25 - 21} = \frac{24}{4} = 6$$

Conclusione

Dunque l'orefice ha pagato l'oro lir. 96 all'oncia, e lir. 6 l'argento.

Verificazione

Oro onc. 3 a lir. 96. . . . lir. 288		Oro onc. 5 a lir. 96. . . . lir. 480	
Arg. onc. 5 a lir. 6. . . . » 30		Arg. onc. 7 a lir. 6. . . . » 42	
1.ª Compera . . . lir. 318		2.ª Compera . . . lir. 522	

Problema XLVII.

Trovar due numeri tali, che il 1.° accresciuto di a stia al 2.° diminuito di m nella ragione di $e : f$; e il 2.° accresciuto di c stia al 1.° diminuito di d nella ragione di $g : h$.

Raziocinio per le Equazioni

Sia x il 1.° numero, ed y il 2.° Eseguendo le accennate condizioni si otterranno le proporzioni

$$1.^a\ x + a : y - m :: e : f$$
$$2.^a\ y + c : x - d :: g : h$$

Fatto in ambedue il prodotto degli estremi, e de' medj si avranno le seguenti

Equazioni del Problema

$$1.^a\ fx + fa = ey - me$$
$$2.^a\ hy + ch = gx - gd$$

Soluzione

1.° Nella 1.ª si aggiunga me. 2.° Si ordini per y. 3.° Si divida per e, e sarà

$$y = \frac{fx + fa + me}{e} \qquad (\varphi)$$

4.° Nella 2.ª si sottragga ch. 5.° Si divida per h, e si otterrà

$$y = \frac{gx - gd - gh}{h} \qquad (\varphi')$$

6.° Si paragoni (φ) con (φ'), e coll'andamento del problema 41.° si avrà

$$(M)\ x = \frac{ged + ceh + fah + meh}{ge - fh} \qquad (N)\ y = \frac{fag + meg + gdf + chf}{ge - fh}$$

Conclusione

Dunque il 1.° numero sarà rappresentato da (M), e il 2.° da (N)

Verificazione

Verificheremo una delle proporzioni, che ci hanno date le equazioni

del problema, sostituendo in essa i valori qui trovati per la x, e per la y, e si avrà

$$\frac{fha + mhe + ged + ceh}{ge - fh} + a : \frac{fag + meg + gdf + chf}{ge - fh} - m :: e : f$$

Moltiplicandó la prima ragione per $ge - fh$ sarà

$$fha + mhe + ged + ceh + age - afh : fag + meg + gdf + chf - mge + mfh :: e : f$$

Riducendo ... $mhe + ged + ceh + age : fag + gdf + chf + mfh :: e : f$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj si otterrà finalmente l'equazione identica, che verifica la proporzione, e la soluzione, cioè

$$mhef + gedf + cehf + agef = agef + gedf + cehf + mhef$$

Applicazione

Cerchinsi due quantità tali, che la 1.ª accresciuta di 3 stia alla 2.ª scemata di 2 nella ragione di 2 : 1; e che la 2.ª accresciuta di 4 stia alla 1.ª scemata di 3 nella ragione di 3 : 1. Avrassi

$$a = 3 \; ; \; m = 2 \; ; \; e = 2 \; ; \; f = 1 \; ; \; c = 4 \; ; \; d = 3 \; ; \; g = 3 \; ; \; h = 1$$

Dunque $x = \frac{18 + 8 + 3 + 4}{6 - 1} = \frac{33}{5}$; $y = \frac{9 + 12 + 4 + 9}{6 - 1} = \frac{34}{5}$

Conclusione

Dunque la 1.ª quantità cercata sarà il rotto $\frac{33}{5}$, e la 2.ª il rotto $\frac{34}{5}$

Verificazione

1.° La 1.ª quantità più 3 darà $\frac{33}{5} + 3 = \frac{33 + 15}{5} = \frac{48}{5}$

La 2.ª quantità meno 2 darà . . . . $\frac{34}{5} - 2 = \frac{34 - 10}{5} = \frac{24}{5}$

Dove si verifica la 1.ª alla 2.ª nella ragione di 2 : 1, cioè la 1.ª dupla della 2.ª

2.° Collo stesso andamento si verificherebbe la seconda condizione del problema.

Problema XLVIII.

S' impiegano degli uomini, e delle donne in una data fattura. Un numero m d'uomini, ed n di donne ricevono lir. a, e l'eccesso della paga per p uomini sopra la paga corrispondente per q donne è lir. b. Quanto riceve ciascun uomo, e ciascuna donna.

Raziocinio per le Equazioni

Sia x la paga di ciascun uomo, y quella di ciascuna donna. Uomini m ricevono tutti insieme mx, e donne n ricevono ny. Fatta la somma di questi due importi dobbiamo avere lir. a. Dunque si otterrà la seguente

I.ª Equazione del Problema

$$mx + ny = a$$

Similmente p uomini ricevono px; ma questa paga debb' essere eguale alla paga, che ricevono q donne, cioè qy, più l'eccesso b. Dunque si avrà la seguente

II.ª Equazione del Problema

$$px = qy + b$$

Soluzione

1°. Nella 1.ª si sottragga ny. 2.° Si divida per m. 3.° Nella 2.ª si divida per p, e si avrà

$$(A)\quad x = \frac{a - ny}{m} \qquad\qquad (B)\quad x = \frac{qy + b}{p}$$

4.° Si paragonino (A), e (B), e coll'andamento del problema 41.° si otterrà

$$x = \frac{bn + aq}{mq + pn} \qquad\qquad y = \frac{pa - mb}{mq + pn}$$

Conclusione

Dunque la paga di ciascun uomo sarà lir. $\frac{bn + aq}{mq + pn}$

E la paga di ciascuna donna . . . . . lir. $\frac{pa - mb}{mq + pn}$

Verificazione

Tutti gli uomini riceveranno $p\left(\frac{bn + aq}{mq + pn}\right) = (\varphi)$. Verifichiamo, che

questo importo sia eguale all' importo delle donne q ch' è $q\left(\frac{pa-mb}{mq+pn}\right)$ più l' eccesso b. Avremo infatti

$$q\left(\frac{pa-mb}{mq+pn}\right)+b=\frac{qpa-mbq+mbq+pnb}{mq+pn}=\frac{qpa+pnb}{mq+pn}=p\left(\frac{qa+nb}{mq+pn}\right)=(\varphi)$$

Applicazione

Supponiamo, che 5 uomini, e 4 donne ricevano lir. 256; e che l' eccesso della paga per 7 uomini sopra la paga corrispondente per 6 donne sia di lir. 80. Avremo

$$m=5\ ;\ n=4\ ;\ a=256\ ;\ p=7\ ;\ q=6\ ;\ b=80$$

Dunque $x=\frac{80.4+256.6}{5.6+7.4}=\frac{320+1536}{30+28}=\frac{1856}{58}=32$

$$y=\frac{256.7-5.80}{5.6+7.4}=\frac{1792-400}{30+28}=\frac{1392}{58}=24$$

Verificazione

1.° Uomini N.° 5 a lir. 32	lir. 160
Donne N.° 4 a lir. 24	» 96
Totale	lir. 256
2.° Uomini N.° 7 a lir. 32	lir. 224
Donne N.° 6 a lir. 24	» 144
Eccesso della paga degli uomini su quella delle donne	lir. 80

Problema XLIX.

Un operajo travaglia un numero n di giorni, e nulla spende; rimane ozioso un numero m di giorni, e spende sempre una data somma al giorno. Fatti i suoi conti trova di aver guadagnate in questi giorni lir. a. Travaglia poi giorni p, e nulla spende; sta ozioso giorni q, e spende sempre una data somma al giorno. Fatti i suoi conti trova d'aver guadagnate in questi giorni lir. b. Quanto spendeva ne' giorni di ozio, e quanto guadagnava ne' giorni di lavoro.

Raziocinio per le Equazioni

Chiamisi x il guadagno di ciascun giorno di lavoro, ed y la spesa d'ogni giorno ozioso. Se dal guadagno de' giorni n di lavoro, ch'è nx, leverassi la spesa de' giorni m d'ozio, ch'è mx, il residuo dovrà essere eguale al guadagno a. Dunque si avrà la seguente

I.ª Equazione del Problema

$$nx - my = a$$

Similmente se dal guadagno de' giorni p di lavoro si toglierà la spesa de' giorni q d'ozio si avrà il residuo b, e quindi la seguente

II.ª Equazione del Problema

$$px - qy = b$$

Soluzione

Questo problema sciolto al solito come il problema 41.° darà

$$x = \frac{aq - mb}{nq - mp} \qquad y = \frac{ap - nb}{nq - mp}$$

Conclusione

Dunque il guadagno di ciascun giorno di lavoro era lire $\frac{aq - mb}{nq - mp}$. E la spesa di ciascun giorno d'ozio era lire $\frac{ap - nb}{nq - mp}$

Verificazione

1.° Il guadagno per giorni n di lavoro sarà $n\left(\frac{aq - mb}{nq - mp}\right)$, e la spesa per giorni m d'ozio sarà $m\left(\frac{ap - nb}{nq - mp}\right)$. Si sottragga questa spesa al guadagno, e veggasi, se il residuo è a, come porta il problema. Eseguite le moltipliche si ha infatti

$$\frac{naq - mnb - map + mnb}{nq - mp} = \frac{naq - map}{nq - mp} = a\left(\frac{nq - mp}{nq - mp}\right) = a$$

2.° Colla stessa facilità si potrebbe verificare la 2.ª condizione.

Applicazione

Si supponga, che lavorando 12 giorni, e restando ozioso 5 giorni guadagnasse, dedotte le spese, lir. 261; e che lavorando 16 giorni, e restando ozioso 7 giorni, dedotte le spese, guadagnasse lir. 343; ritenuto, come nel problema generale, che nei giorni di lavoro nulla spendesse, e che in quelli di ozio spendesse una data somma costante. Avremo

$$n = 12 \; ; \; m = 5 \; ; \; a = 261 \; ; \; p = 16 \; ; \; q = 7 \; ; \; b = 343$$

$$\text{Dunque } x = \frac{261 \,.\, 7 - 343 \,.\, 5}{12 \,.\, 7 - 5 \,.\, 16} = \frac{1827 - 1715}{84 - 80} = \frac{112}{4} = 28$$

$$y = \frac{261 \,.\, 16 - 343 \,.\, 12}{12 \,.\, 7 - 5 \,.\, 16} = \frac{4176 - 4116}{84 - 80} = \frac{60}{4} = 15$$

Conclusione

Dunque ne' giorni di lavoro guadagnava al giorno lir. 28. E nei giorni d'ozio perdeva al giorno lir. 15

Verificazione

1.° Giorni 12 a lir. 28 . . .	lir. 336	2.° Giorni 16 a lir. 28 . . .	lir. 448
Spesa di giorni 5 a lir. 15	» 75	Spesa di giorni 7 a lir. 15	» 105
Guadagno residuo . .	lir. 261	Guadagno residuo . .	lir. 343

Problema L.

S'imprime un'opera sotto una data forma; se si aggiungono m linee a ciascuna pagina, ed a ciascuna linea n lettere, ciascuna pagina conterrà p lettere di più. Ma se si sottraggono r linee a ciascuna pagina, e ad ogni linea e lettere, si avranno in ciascuna pagina d lettere di meno. Domandasi il numero delle linee di ciascuna pagina, e quello delle lettere di ciascuna linea.

Raziocinio per le Equazioni

Sieno x le linee di ciascuna pagina, ed y le lettere di ciascuna linea. Egli è evidente, che ogni pagina conterrà lettere xy. Ora se si aggiugneranno m linee a ciascuna pagina, ed a ciascuna linea n lettere, il numero delle lettere componenti una pagina sarà invece $(x+m)(y+n)$.

Ma questo numero debb' essere uguale a tutte le lettere xy, che si avevano prima di questa addizione, ed alle lettere p di più accennate nel problema. Dunque si avrà la seguente

I.ª Equazione del Problema

$$(x+m)(y+n)=xy+p$$

Collo stesso raziocinio sulla 2.ª condizione del problema avrassi la seguente

II.ª Equazione del Problema

$$(x-r)(y-e)=xy-d$$

Soluzione

1.° Si eseguiscano le accennate moltipliche in ambedue le equazioni. 2.° Si sottragga quindi in ambedue la quantità xy. 3.° Si trovino i valori della x nelle sue equazioni ridotte, e confrontati fra loro coll'andamento del problema 41.° si otterrà

$$x=\frac{rem+dm-rp+mnr}{me-rn} \qquad y=\frac{pe-mne-nre-dn}{me-rn}$$

Conclusione

Dunque le linee erano $\frac{rem+dm-rp+mnr}{me-rn}$, e le lettere $\frac{pe-mne-nre-dn}{me-rn}$

Verificazione

Per non ingolfarci in lunghe operazioni, che sarebbero necessarie, onde verificare le formole generali, verificheremo la soluzione del problema applicandolo al seguente caso particolare.

Applicazione

Supponiamo, che aggiunte 3 linee a ciascuna pagina, ed a ciascuna linea 4 lettere, ciascuna pagina contenga di più lettere 228; e che sottratte 2 linee a ciascuna pagina, e ad ogni linea 3 lettere si abbiano in ciascuna pagina 147 lettere di meno. Avrebbesi

$$m=3\ ;\ n=4\ ;\ p=228\ ;\ r=2\ ;\ e=3\ ;\ d=147$$

Dunque $x=\frac{2.3.3+147.3-2.228+2.4.3}{3.3-2.4}=\frac{18+441-456+24}{9-8}=\frac{483-456}{1}=27$

$$y=\frac{228.3-3.4.3-4.2.3-147.4}{3.3-2.4}=\frac{684-36-24-588}{9-8}=\frac{684-648}{1}=36$$

Conclusione

Dunque le linee in ciascuna pagina erano 27, e le lettere in ciascuna linea 36.

Verificazione

Il numero totale delle lettere contenute in ciascuna pagina sarà 36×27, ossia 972.

1.° Alle 27 linee aggiunte 3 linee, si hanno linee 30. Alle 36 lettere aggiunte 4 lettere si hanno lettere 40. In questo caso ogni pagina conterrà lettere 30×40, ossia 1200; cioè 228 di più.

2.° Dalle 27 linee sottratte 2 linee, ne rimangono 25. Dalle 36 lettere levate 3 lettere, nè restano 33. In questo caso ogni pagina conterrà lettere 25×33, ossia 825; cioè 147 di meno.

Problema LI.

Trovare due numeri, la cui somma sia eguale alla $n.^{sima}$ parte del loro prodotto, e che stiano fra loro nella ragione di $p:q$.

Raziocinio per le Equazioni

Sia x il 1.° numero, y il 2.° Avremo $x+y$ per l'espressione della somma. Ma questa debb' essere uguale alla $n.^{sima}$ parte del prodotto, ch' è $\frac{xy}{n}$. Dunque si avrà la seguente

I.ª Equazione del Problema

$$x+y=\frac{xy}{n}$$

I due numeri poi dovendo stare fra loro $::p:q$ si avrà la proporzione $x:y::p:q$; onde, fatto il prodotto degli estremi, e de' medj, si avrà la seguente

II.ª Equazione del Problema

$$qx=py$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per n la 1.ª 2.ª Vi si sottragga nx. 3.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 4.° Si divida per $y-n$, e si avrà

$$x=\frac{ny}{y-n}$$

5.° Nella 2.ª si divida per q, e si otterrà

$$x=\frac{py}{q}$$

6.° Si paragonino questi due valori della x, e si avrà come al problema 41.°

$$x=\frac{n}{q}\left(q+p\right) \qquad y=\frac{n}{p}\left(q+p\right)$$

Conclusione

Dunque il 1.° numero sarà $\frac{n}{q}\left(p+q\right)$, ed il 2.° $\frac{n}{p}\left(p+q\right)$

Verificazione

1.° La somma sarà $\frac{np+nq}{q}+\frac{np+nq}{p}=\frac{np^2+2npq+nq^2}{pq}=\varphi$

Il prodotto sarà $\left(\frac{n}{q}\left(p+q\right)\right)\left(\frac{n}{p}\left(p+q\right)\right)=\frac{n^2p^2+2n^2pq+n^2q^2}{pq}$

E la $n.^{sima}$ parte di questo prodotto sarà $\frac{np^2+2npq+nq^2}{pq}=\varphi$

2.° Colla stessa facilità si potrebbe verificare la 2.ª condizione.

Applicazione

Sia la somma de' numeri eguale al sesto del loro prodotto, e i due numeri stiano fra loro :: 3 : 2. Avrassi

$$n=6\ ;\ p=3\ ;\ q=2$$

Dunque $x=\frac{6}{2}\left(3+2\right)=\frac{6\,.\,5}{2}=\frac{30}{2}=15$

$y=\frac{6}{3}\left(3+2\right)=\frac{6\,.\,5}{3}=\frac{30}{3}=10$

Conclusione

Dunque i due numeri sono 15, e 10.

Verificazione

1.° La somma è 25. Il prodotto 150; ed è $\frac{150}{6} = 25$

2.° I numeri poi stanno $:: 3 : 2$, poichè nella proporzione

$$15 : 10 :: 3 : 2$$

si verifica il prodotto degli estremi eguale a quello de' medj.

Problema LII.

A, B, C hanno perduto al giuoco tutto il loro denaro. A, e C hanno perduto lir. a; A, e B lir. b; B, e C lir. c. Quanto ha perduto ciascuno.

Raziocinio per le Equazioni

Chiamisi x la perdita di A; y quella di B; z quella di C. Eseguite le tre condizioni del problema, il cui raziocinio è chiarissimo, si otterranno le seguenti

Equazioni del Problema

1.ª $x + z = a$
2.ª $x + y = b$
3.ª $y + z = c$

Soluzione

1.° Sottraggasi z nella 1.ª, e si avrà . . . . . $x = a - z$ (φ)
2.° Nella 2.ª si sostituisca il valore (φ), e si avrà . . $a - z + y = b$ (φ')
3.° Nella 3.ª si sottragga z, e si otterrà . . . . . $y = c - z$ (φ'')
4.° Sostituiscasi (φ'') in (φ'). 5.° Si trasportino le z nel 2.° membro, e b nel 1.° 6.° Si divida per 2, e si avrà

$$z = \frac{a + c - b}{2}$$

7.° Questo valore della z si porti in (φ), e si otterrà

$$x = a - \left(\frac{a + c - b}{2}\right) = \frac{2a - a - c + b}{2} = \frac{a - c + b}{2}$$

8.° Lo stesso valore si sostituisca in (φ''), e sarà

$$y = c - \left(\frac{a + c - b}{2}\right) = \frac{2c - a - c + b}{2} = \frac{c - a + b}{2}$$

Conclusione

Dunque A perdette . . . . . $\frac{a-c+b}{2}$

B perdette . . . . . $\frac{c-a+b}{2}$

C perdette . . . . . $\frac{a+c-b}{2}$

Osservazione

Ci dispensiamo dal verificare, e dall'applicare ad un caso particolare queste formole, avendolo già fatto nel problema 9.°, ch'è lo stesso problema sciolto con una sola incognita. Noi abbiam voluto sciogliere questo problema anche con tre incognite per far vedere come alle volte un problema a più incognite possa essere sciolto con una incognita sola, ove le condizioni sue sieno tali, che da una sola dipendano le altre.

Problema LIII.

Sono date tre materie. La 1.ª costa all'oncia un prezzo a. La 2.ª b. La 3.ª d. Se ne vuole un misto al prezzo c per modo, che il peso della 2.ª stia a quello della 3.ª :: $m : n$.

Raziocinio per le Equazioni

Chiamato x il peso della 1.ª materia, y quello della 2.ª, e z quello della 3.ª il valore del peso x sarà ax, quello del peso y sarà by, e dz quello del peso z. Ma i tre pesi sommati fra loro debbono formare un'oncia. Dunque si avrà la seguente

I.ª Equazione del Problema

$$x + y + z = 1$$

I tre valori poi debbono formare un prezzo c. Dunque si avrà la seguente

II.ª Equazione del Problema

$$ax + by + dz = c$$

Finalmente instituendo l'accennata proporzione $y : z :: m : n$, e fatto in essa il prodotto degli estremi, e de' medj si avrà la seguente

III.ª Equazione del Problema

$$mz = ny$$

Soluzione

1.° Dividasi per m la 3.ª, e si avrà $z = \frac{ny}{m}$ (φ)

2.° Sostituiscasi (φ) nella 1.ª 3.° Si moltiplichi per m. 4.° Si sottragga my, ed ny. 5.° Si divida per m, e si otterrà $x = \frac{m - my - ny}{m}$ (φ')

6.° Nella 2.ª si sostituiscano i valori (φ), e (φ') moltiplicati ne' rispettivi coefficienti, e si avrà

$$by + \left(\frac{am - amy - any}{m}\right) + \frac{ndy}{m} = c$$

7.° Si moltiplichi, e si divida per m il 1.° termine. 8.° Si sottragga $\frac{am}{m}$, ossia a. 9.° Sciolta la y ne' suoi fattori dividasi per $\frac{mb + nd - am - an}{m}$, e sarà

$$y = \frac{c - a}{\frac{mb + nd - am - an}{m}} = \frac{m(c - a)}{mb + nd - am - an} = (A)$$

10.° Sostituito questo valore in (φ) sarà

$$z = \frac{mn(c - a)}{m(mb + nd - am - an)} = \frac{n(c - a)}{mb + nd - am - an} = (B)$$

11.° Scritta la quantità (φ') sotto quest' altra forma $x = \frac{m}{m} - \left(\frac{m + n}{m}\right) y$ vi si sostituisca il valore (A), e semplificati i termini si avrà finalmente

$$x = \frac{mb + nd - mc - nc}{mb + nd - am - an} = (C)$$

Conclusione

Dunque entrerà nel misto un peso (C) della 1.ª materia, un peso (A) della 2.ª ed un peso (B) della 3.ª

Verificazione

1.° I tre pesi debbono formare un' oncia. E si ha infatti

$$\frac{mb + nd - mc - nc + mc - am + nc - an}{mb + nd - am - an} = \frac{mb + nd - am - an}{mb + nd - am - an} = 1$$

2.° I tre valori de' pesi, ch' entrano nel misto debbono formare un valore totale c. Ed è infatti

$$\frac{amb+and-amc-anc+bmc+dnc-amb-and}{mb+nd-am-an}=\frac{bmc+dnc-amc-anc}{mb+nd-am-an}=c\left(\frac{mb+nd-am-an}{mb+nd-am-an}\right)=c$$

3.° Finalmente debb' essere il peso (A) al peso (B) nella ragione di $m:n$; ed è infatti

$$\frac{m(c-a)}{mb+nd-am-an}:\frac{n(c-a)}{mb+nd-am-an}::m:n$$

perchè dividendo la 1.ª ragione pel fattor comune si ha $m:n::m:n$

Applicazione

Le tre materie sieno oro a lir. 100 all' oncia, argento a lir. 8, e rame a lir. $\frac{1}{20}$; e vogliasi un misto, che costi lir. 60, in cui il rame sia doppio dell' argento. Avrassi

$$a=100;\ b=8;\ d=\frac{1}{20};\ c=60;\ m=1;\ n=2$$

Dunque $$x=\frac{8+\frac{2}{20}-60-120}{8+\frac{2}{20}-200-100}=\frac{8+\frac{1}{10}-180}{8+\frac{1}{10}-300}=\frac{\frac{81-1800}{10}}{\frac{81-3000}{10}}=\frac{-1719}{-2919}=\frac{1719}{2919}$$

$$y=\frac{60-100}{8+\frac{2}{20}-200-100}=\frac{-40}{\frac{81-3000}{10}}=\frac{-400}{-2919}=\frac{400}{2919}$$

$$z=\frac{120-200}{8+\frac{2}{20}-200-100}=\frac{-80}{\frac{81-3000}{10}}=\frac{-800}{-2919}=\frac{800}{2919}$$

Conclusione

Dunque entreranno nel misto parti d' oro $\frac{1719}{2919}$, d'argento $\frac{400}{2919}$, e di rame $\frac{800}{2919}$

Verificazione

1.° I tre pesi devono fare un' oncia. Ed è infatti $\frac{1719+400+800}{2919}=\frac{2919}{2919}=1$

2.° Il prezzo dell'oro, ch'entra nel misto sarà $\frac{100.1719}{2919}=\frac{171900}{2919}=58,\frac{2598}{2919}$

Dell' argento . . . . . $\frac{8.400}{2919}=\frac{3200}{2919}=1,\frac{281}{2919}$

Del rame . . . . . $\frac{1}{20}\times\frac{800}{2919}=\frac{1}{20}\times\frac{40.20}{2919}=0,\frac{40}{2919}$

Prezzo del misto . . . . . lir. 60, 0000

3.° Finalmente essendo le parti d'argento $\frac{400}{2919}$, e quelle del rame $\frac{800}{2919}$ si verifica, che il rame nel misto è doppio dell'argento.

Problema LIV.

Cercansi tre numeri tali, che il 1.° colla parte $m.^{sima}$ degli altri due faccia a; il 2.° colla $n.^{sima}$ degli altri due faccia a'; e il 3.° colla $r.^{sima}$ degli altri due faccia a''.

Raziocinio per le Equazioni

Sia x il 1.° numero, y il 2.°, z il 3.° Esprimendo le condizioni accennate nel problema avremo le seguenti

Equazioni del Problema

$$1.^a \quad x + \frac{y+z}{m} = a$$

$$2.^a \quad y + \frac{x+z}{n} = a'$$

$$3.^a \quad z + \frac{x+y}{r} = a''$$

Soluzione

1.° Sottraggasi dalla 1.ª $\frac{y+z}{m}$ . . . . . $x = a - \left(\frac{y+z}{m}\right)$ (φ)

2.° Si moltiplichi per n la 2.ª, e vi si levi ny, e z . . . $x = na' - ny - z$ (φ')

3.° Si moltiplichi per r la 3.ª, e vi si levi z, ed y . . . $x = ra'' - rz - y$ (φ'')

4.° Si paragoni (φ) con (φ'), e si otterrà

$$y = \frac{m(na' - a) + z(1 - m)}{mn - 1} \qquad (\pi)$$

5.° Si paragoni (φ) con (φ''), e si avrà collo stesso andamento

$$y = \frac{m(ra'' - a) + z(1 - mr)}{m - 1} \qquad (\pi')$$

6.° Confrontato (π) con (π') si eseguiscano le accennate moltipliche dei numeratori. 7.° Si moltiplichi il 1.° membro per $m - 1$, ed il 2.° per $mn - 1$, e così l'equazione sarà sgombra dei divisori. 8.° Si aggiunga z.

9.° Si dividano tutti i termini per m. 10.° Si sottragga a. 11.° Si trasportino tutti i termini incogniti nel 1.° membro, ed i cogniti nel 2.° 12.° Sciolta la z ne' suoi fattori si divida pel coefficiente, che n' emerge, e si avrà

$$z = \frac{m(a'n - a - rna'' + an) + ra'' - na'}{n - mrn + r + m - 2} \qquad (A)$$

13.° Sostituito questo valore in (π) sarà

$$y = \left\{ m(na' - a) + (1 - m)\left(\frac{na'm - ma - na' - mrna'' + man + ra''}{n - mrn + r + m - 2}\right)\right\} \frac{1}{mn - 1}$$

E ridotta questa formola al medesimo denominatore si avrà

$$y = \frac{(mna' - ma)(n - mrn + r + m - 2) + (1 - m)(ma'n - ma - na' - mra''n + man + ra'')}{(mn - 1)(n - mnr + r + m - 2)} \qquad (B)$$

14.° Finalmente sostituiti i valori (A), e (B) in (φ) si otterrà

$$x = a - \frac{1}{m}\left\{\frac{(mna' - ma)(n - mnr + r + m - 2) + (1 - m)(ma'n - ma - na' - mra''n + man + ra'')}{(mn - 1)(n - mnr + r + m - 2)}\right\}$$
$$- \frac{1}{m}\left\{\frac{m(a'n - a - ra''n + an) + ra'' - na'}{n - mrn + r + m - 2}\right\} \qquad (C)$$

Conclusione

Dunque il 1.° numero sarà rappresentato dalla formola (C), il 2.° dalla formola (B), e il 3.° dalla formola (A).

Verificazione

Ci dispensiamo dal verificare le formole generali per non intraprendere delle operazioni prolisse di troppo. Verificheremo la soluzione applicando le formole suddette ad un caso particolare.

Applicazione

Cercansi tre numeri tali, che il 1.° colla metà degli altri due; il 2.° colla terza parte degli altri due; e il 3.° colla quarta parte degli altri due, facciano sempre la somma 51. Avremo

$$m = 2\ ;\ n = 3\ ;\ r = 4\ ;\ a = a' = a'' = 51$$

$$\text{Dunque } z = \frac{2(153 - 51 - 612 + 153) + 204 - 153}{3 - 24 + 4 - 2 + 2} = \frac{2(306 - 663) + 51}{9 - 26} = \frac{-357.2 + 51}{-17} = \frac{-663}{-17} = 39$$

$$y = \frac{(306 - 102)(3 - 24 + 4 - 2 + 2) + (1 - 2)(306 - 102 - 1224 + 306 + 204 - 153)}{(6 - 1)(3 - 24 + 4 - 2 + 2)}$$

$$= \frac{-17.204 + (816 - 1479) \times -1}{-17.5} = \frac{-3468 + 663}{-85} = \frac{-2805}{-85} = 33$$

$$x = 51 - \frac{1}{2}(33) - \frac{1}{2}(39) = 51 - \frac{33}{2} - \frac{39}{2} = 51 - \frac{72}{2} = 51 - 36 = 15$$

Conclusione

Dunque il 1.° numero cercato sarà 15; il 2.° 33; il 3.° 39.

Verificazione

1.° $x = 15$ 15	2.° $y = 33$ 33	3.° $z = 39$ 39
$\frac{y}{2} = \frac{33}{2}$ ..... $16\frac{1}{2}$	$\frac{x}{3} = \frac{15}{3}$ 5	$\frac{x}{4} = \frac{15}{4}$ ..... $3\frac{3}{4}$
$\frac{z}{2} = \frac{39}{2}$ ..... $19\frac{1}{2}$	$\frac{z}{3} = \frac{39}{3}$ 13	$\frac{y}{4} = \frac{33}{4}$ ..... $8\frac{1}{4}$
Somma..... 51 -	Somma..... 51	Somma..... 51 -

Problema LV.

Le tre cifre d'un numero, se si considerano isolate, sono tali, che il prodotto delle estreme diviso per la media è 3, e che la differenza tra le estreme, e la media è 2. Sottratto poi 198 dal numero composto delle tre cifre col loro proprio valore di posizione si ha un resto, ch'è uguale ad un numero composto delle stesse cifre, ma scritte con ordine inverso di posizione.

Raziocinio per le Equazioni

Sieno le tre cifre x, y, z. Il prodotto delle estreme diviso per la media è 3. Dunque si avrà la seguente

I.ª Equazione del Problema

$$\frac{xz}{y} = 3$$

La differenza fra le estreme, e la media è 2. Dunque si avrà la seguente

II.ª Equazione del Problema

$$x + z - y = 2$$

Dato alle tre cifre il valore rispettivo di posizione, ed a queste sottratto

il 198 si ha per residuo lo stesso numero di prima, ma scritto con ordine inverso. Dunque si avrà la seguente

III.ª Equazione del Problema

$$100x + 10y + z - 198 = 100z + 10y + x$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi la 1.ª per y. 2.° Si divida per 3, e si avrà $y = \frac{xz}{3}$ (π)
3.° Si sostituisca (π) nella 2.ª 4.° Si moltiplichi per 3. 5.° Si sottragga $3z$.
6.° Sciolta la x ne' suoi fattori si divida per $3 - z$, e sarà $x = \frac{6 - 3z}{3 - z}$ (φ)
7.° Nella 3.ª si sottragga $10y$, x, e z. 8.° Si aggiunga 198, ossia 2×99.
9.° Si divida per 99, e sarà $x = z + 2$ (φ')
10.° Si paragoni (φ) con (φ'). 11.° Si moltiplichi per $3 - z$ l'equazione, che ne sorte. 12.° Si sottragga 6. 13.° Si divida per z. 14.° Si aggiunga 3, e z, ed avrassi $z = 4$
15.° Sostituiscasi questo valore in (φ'), e sarà $x = 6$
16.° Finalmente sostituiti i valori trovati per x, e per z nell'equazione (π) si avrà $y = 8$

Conclusione

Dunque le tre cifre sono 6, 8, 4, ed il numero cercato 684

Verificazione

1.° Prodotto delle estreme diviso per la media è 3 . . $\frac{6 \cdot 4}{8} = \frac{24}{8} = 3$
2.° Differenza fra le estreme, e la media è 2. . . . . $6 + 4 - 8 = 10 - 8 = 2$
3.° Sottratto 198 da 684 debbesi avere 486. . . . . $684 - 198 = 486$

Problema LVI.

Un facchino trasporta tre qualità di vasi di porcellana a questo accordo, ch'egli tanto pagherebbe per ogni vaso rotto, quanto riceverebbe per quelli, che portasse intatti della medesima specie. Ora nella 1.ª portura ha 2 vasi piccoli, 4 mezzani, e 9 grandi; rompe tutti i mezzani, consegna intatti gli altri, e riceve in pagamento lir. 28. Nella 2.ª ha 7

vasi piccoli, 3 mezzani, e 5 grandi; consegna sani i piccoli, ed i mezzani, rompe tutti i grandi, e riceve lir. 3. Finalmente nella 3.ª ha 9 vasi piccoli, 10 mezzani, ed 11 grandi; rompe tutti questi ultimi, consegna tutti gli altri intatti, e riceve lir. 4. Si domanda il prezzo del trasporto di ciascun vaso delle tre qualità.

Raziocinio per le Equazioni

Sia x il prezzo del trasporto d'un vaso piccolo, y d'un mezzano, e z d'un grande. Egli è chiaro, che ciascuna delle tre somme, che il facchino riceve è la differenza tra quello, che deve ricevere per li vasi, che porta intatti, e quello, che deve sborsare pei rotti. Esprimendo adunque queste differenze, secondo il numero de' vasi, che porta, e che rompe, si avranno le seguenti

Equazioni del Problema

$$\begin{array}{ll} 1.^a & 2x - 4y + 9z = 28 \\ 2.^a & 7x + 3y - 5z = 3 \\ 3.^a & 9x + 10y - 11z = 4 \end{array}$$

Soluzione

1.° Nella 1.ª si sottragga $9z$. 2.° Si aggiunga $4y$. 3.° Si divida per 2, e si avrà $x = \frac{28 + 4y - 9z}{2}$ (π)

4.° Sostituiscasi questo valore nella 2.ª, moltiplicandolo per 7, e nella 3.ª, moltiplicandolo per 9, e sarà

$$\frac{196 + 28y - 63z}{2} + 3y - 5z = 3 \qquad (\varphi)$$

$$\frac{252 + 36y - 81z}{2} + 10y - 11z = 4 \qquad (\varphi')$$

5.° Si moltiplichi per 2 tanto (φ), quanto (φ'), e quelle due equazioni diventeranno

$196 + 28y - 63z + 6y - 10z = 6$ $\qquad$ $252 + 36y - 81z + 20y - 22z = 8$

6.° Si riducano ambedue, e diventeranno

(φ'') $196 + 34y - 73z = 6$ $\qquad$ (φ''') $252 + 56y - 103z = 8$

7.° In (φ'') si sottragga 196, s'aggiunga $73z$, e si divida per 34, e sarà

$$y = \frac{73z - 190}{34} \qquad (\pi')$$

8.° Sostituiscasi (π') in (φ'''). 9.° Si eseguisca l'accennata moltiplica del

numeratore. 10.° Si moltiplichi per 34. 11.° Si riducano i termini semplificabili. 12.° Si aggiunga 2072, e si divida per 586. Avrassi

$$z = \frac{2344}{586} = 4$$

13.° Questo valore si porti in (π'), e sarà

$$y = \frac{292 - 190}{34} = \frac{102}{34} = 3$$

14.° Si pongano infine i valori trovati per z, e per y in (π), e si otterrà

$$x = \frac{28 + 12 - 36}{2} = \frac{40 - 36}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Conclusione

Dunque il porto di ciascun vaso piccolo era di lir. 2; quello di ciascun vaso mezzano era di lir. 3; e quello di ciascun vaso grande era di lir. 4.

Verificazione

1.° $2.2 - 4.3 + 9.4 = 4 - 12 + 36 = 40 - 12 = 28$. Somma ricevuta.
2.° $7.2 + 3.3 - 5.4 = 14 + 9 - 20 = 23 - 20 = 3$. Somma ricevuta.
3.° $9.2 + 10.3 - 11.4 = 18 + 30 - 44 = 48 - 44 = 4$. Somma ricevuta.

Problema LVII.

La polvere da cannone è composta di salnitro, di zolfo, e di carbone. La mistura è tale, che sopra libb. 100 il triplo del peso del salnitro è uguale a tredici volte quello del carbone, più cinque volte quello dello zolfo; e che cinque volte il peso del salnitro vale trentasette volte il peso dello zolfo, meno sette volte quello del carbone. Con quale proporzione si eseguisce il misto.

Raziocinio per le Equazioni

Sia x il peso del salnitro, y dello zolfo, z del carbone. Questi pesi rappresentano libbra, e sommati debbono fare 100. Dunque si avrà la seguente

I.ª Equazione del Problema

$$x + y + z = 100$$

Ma il triplo del peso del salnitro, cioè $3x$ eguaglia 13 volte il peso del carbone, cioè $13z$, più 5 volte il peso dello zolfo, cioè $5y$. Dunque avrassi la seguente

II.ª Equazione del Problema

$$3x = 13z + 5y$$

Collo stesso raziocinio sulla 3.ª condizione si otterrà la seguente

III.ª Equazione del Problema

$$5x = 37y - 7z$$

Soluzione

1.° Nella 1.ª si sottragga y, e z. 2.° Si divida per 3 la 2.ª, e per 5 la 3.ª, e si avrà

$$x = 100 - y - z \qquad x = \frac{5y + 13z}{3} \qquad x = \frac{37y - 7z}{5}$$

3.° Si trattino queste equazioni come abbiamo fatto nel problema antecedente, e si otterrà

$$z = 12\frac{1}{2};\ y = 12\frac{1}{2};\ x = 75$$

Conclusione

Dunque in 100 libbra di polvere vi saranno 75 libb. di salnitro, e libb. $12\frac{1}{2}$ tanto di zolfo, quanto di carbone; talchè il salnitro dovrà essere sempre un sestuplo degli altri due componenti.

Verificazione

1.° I tre pesi danno $75 + 12\frac{1}{2} + 12\frac{1}{2} = 75 + 25 = 100$

2.° Il triplo del peso del salnitro è libb. 225. Il quintuplo del peso dello zolfo è libb. $62\frac{1}{2}$, che sommato con 13 volte il peso del carbone, ossia con libb. $162\frac{1}{2}$ dà precisamente libb. 225.

3.° Il quintuplo del peso del salnitro è libb. 375. Se a 37 volte il peso

dello zolfo, cioè a libb. 462 $\frac{1}{2}$ si leverà 7 volte il peso del carbone, cioè libb. 87 $\frac{1}{2}$ resteranno precisamente libb. 375.

Problema LVIII.

Un Generale ha tre corpi d'armata. Il 1.° è di Francesi; il 2.° di Tedeschi; il 3.° di Spagnuoli, e vuol dare l'assalto ad una fortezza con uno di questi corpi, promettendo una ricompensa di scudi 901 disponibili in questo modo: che ciascun soldato del corpo assalitore riceverà uno scudo, e che il resto verrà egualmente distribuito agli altri due corpi. Ora egli trova, che se i Francesi danno l'assalto, ciascun soldato degli altri corpi riceve un mezzo scudo; se lo danno i Tedeschi, un terzo; se lo danno gli Spagnuoli, un quarto. Quanti soldati conteneva ciascun corpo.

Raziocinio per le Equazioni

Sieno x i Francesi, y i Tedeschi, z gli Spagnuoli, e per abbreviazione di calcolo si faccia $x+y+z=\varphi$. Se i Francesi vanno all'assalto, il numero di quelli, che non vi ci vanno sarà tutto il numero de' soldati, meno i Francesi, cioè $\varphi-x$. Così se i Tedeschi vanno essi all'assalto, il numero di quelli, che non vi ci vanno sarà $\varphi-y$; se gli Spagnuoli $\varphi-z$. Ma nel 1.° caso ciascun soldato, che non va all'assalto riceve mezzo scudo; dunque dalla somma disponibile quelli, che non vanno all'assalto riceveranno scudi $(\varphi-x)\frac{1}{2}$. Ma questa quantità unita a scudi x, ch'è il totale degli scudi da darsi agli assalitori, ricevendo tutti uno scudo, dee formare scudi 901. Dunque si avrà la seguente

I.ª Equazione del Problema

$$x+(\varphi-x)\frac{1}{2}=901$$

Collo stesso raziocinio troveremo egualmente le seguenti

II.ª Equazione del Problema

$$y+(\varphi-y)\frac{1}{3}=901$$

III.ª Equazione del Problema

$$z + (\varphi - z)\frac{1}{4} = 901$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per 2 la 1.ª; per 3 la 2.ª; per 4 la 3.ª, e sarà

(A) $2x + \varphi - x = 1802$ (B) $3y + \varphi - y = 2703$ (C) $4z + \varphi - z = 3604$

2.° Si riducano le tre equazioni (A), (B), (C), e in tutte si sottragga φ. Si otterrà

(A') $x = 1802 - \varphi$ (B') $2y = 2703 - \varphi$ (C') $3z = 3604 - \varphi$

3.° Si moltiplichi (A') per 6; (B') per 3; (C') per 2, ed avrassi

$6x = 10812 - 6\varphi$ $6y = 8109 - 3\varphi$ $6z = 7208 - 2\varphi$

4.° Si sommino queste tre ultime equazioni, e riescirà

$$6x + 6y + 6z = 26129 - 11\varphi$$

5.° Ponendo il 1.° membro sotto il fattore $6(x + y + z) = 6\varphi$, sarà

$$6\varphi = 26129 - 11\varphi$$

6.° Aggiungasi 11φ. 7.° Si divida per 17, e si otterrà

$$\varphi = \frac{26129}{17} = 1537$$

8.° Questo valore si sostituisca in (A'), ed avrassi

$$x = 1802 - 1537 = 265$$

9.° Si sostituisca pure in (B'), e si divida per 2. Sarà

$$y = \frac{1166}{2} = 583$$

10.° Si ponga in (C'), e si divida per 3, e si avrà per ultimo

$$y = \frac{2067}{3} = 689$$

Conclusione

Dunque i Francesi erano 265; i Tedeschi 583; e gli Spagnuoli 689. Tutto l'esercito rappresentato da φ era forte di 1537 uomini.

Verificazione

1.° I tre corpi sommati danno $265 + 583 + 689 = 1537$

2.° Supponiamo, che i Tedeschi vadano all'assalto. Dalla somma di scudi 901 essi percepiranno scudi 583, perchè sono 583, e ciascheduno ne riceve uno. Resteranno disponibili per gli altri due corpi 318 scudi. Ora

i Francesi, e gli Spagnuoli sommati fra loro danno uomini 954. In questo caso ciascun soldato degli altri due corpi riceve un terzo di scudo. Dunque in totale riceveranno scudi $\frac{954}{3} = 318$, ch'è il residuo accennato.

3.° Similmente si verificherebbero le altre due supposizioni.

Problema LIX.

Trovare un numero intero determinato composto di quattro cifre tali, che sommando le prime tre (prese sempre nel loro valor semplice) venga a formarsi 18; sommando le prime due colla quarta si abbia 10; sommando la prima colle ultime due si ottenga 19; e 10 novellamente risulti dalla somma delle ultime tre.

Raziocinio per le Equazioni

Essendo il numero cercato intero, e composto di quattro cifre, conterrà esso unità, decine, centinaja, e migliaja. Chiamisi pertanto x il numero delle migliaja, y quello delle centinaja, z quello delle decine, u quello delle unità. Eseguite le somme accennate nelle condizioni del problema si avranno le seguenti

Equazioni del Problema

$$\begin{aligned} &1.^a\ x + y + z = 18 \\ &2.^a\ x + y + u = 10 \\ &3.^a\ x + z + u = 19 \\ &4.^a\ y + z + u = 10 \end{aligned}$$

Soluzione

1.° Facciasi $x + y + z + u = L$. 2.° Si sostituisca questo valore nelle quattro equazioni, e si avrà

$$L - 18 = u\ ;\ L - 10 = z\ ;\ L - 19 = y\ ;\ L - 10 = x \qquad (\varphi)$$

3.° Si sommino queste equazioni, e si otterrà

$$4L - 57 = x + y + z + u = L$$

4.° Si aggiunga 57, si sottragga L, si divida per 3, e sarà

$$L = \frac{57}{3} = 19$$

5.° Questo valore si sostituisca nelle quattro equazioni (φ), e si avrà

$$u = 19 - 18 = 1\ ;\ z = 19 - 10 = 9\ ;\ y = 19 - 19 = 0\ ;\ x = 19 - 10 = 9$$

Conclusione

Dunque sarà $x = 9\ ; y = 0\ ; z = 9\ ; u = 1$, ed il numero cercato sarà 9091.

Verificazione

1.° . . . 9	2.° . . . 9	3.° . . . 9	4.° . . . 0
0	0	9	9
9	1	1	1
Somma 18	Somma 10	Somma 19	Somma 10

Problema LX.

Vi sono quattro mercanti, che mettono in società un capitale di lir. a. Il capitale del 1.° più una somma m è uguale a quello del 2.° meno la stessa somma m, a quello del 3.° moltiplicato per m, ed a quello del 4.° diviso per m. Quanto ciascun mercante contribuisce al capitale.

Raziocinio per le Equazioni

La parte contribuita dal 1.° sia x; quella contribuita dal 2.° sia y; dal 3.° z; e dal 4.° u. Eseguite le accennate condizioni si otterranno le seguenti

Equazioni del Problema

1.ª $x + m = y - m$

2.ª $x + m = mz$

3.ª $x + m = \frac{u}{m}$

Soluzione

Questo problema non ci fornisce, che tre equazioni, sebbene abbia quattro incognite; pure è di sua natura determinato, una incognita dipendendo dall'altra, e riducendosi quindi ad una sola, come vedremo.

1.° Nella 1.ª si aggiunga m. 2.° Nella 2.ª si divida per m. 3.° Nella 3.ª si moltiplichi per m, ed ordinate l'equazioni per y, z, u, sarà

$$y = x + 2m \quad (\varphi) \qquad z = \frac{x+m}{m} \quad (\varphi') \qquad u = mx + mm \quad (\varphi'')$$

4.° Si riuniscano le quattro parti x, $x + 2m$, $\frac{x+m}{m}$, $mx + mm$, le quali debbono formare la somma a, e si potrà instituire un'altra equazione ad una sola incognita, che scioglierà il problema; e sarà

$$x + x + 2m + \frac{x+m}{m} + mx + mm = a$$

5.° Si moltiplichi per m questa equazione. 6.° Si riducano i termini, e si portino nel 2.° membro tutti i termini cogniti. 7.° Si sciolga la x sotto i suoi fattori. 8.° Si divida pel coefficiente della x, e si avrà

$$x = m\left(\frac{a - m^2 - 2m - 1}{2m + 1 + m^2}\right)$$

9.° Si sostituisca questo valore in (φ), e sarà

$$y = \frac{ma - m^3 - 2m^2 - m}{2m + 1 + m^2} + 2m = \frac{ma - m^3 - 2m^2 - m + 4m^2 + 2m + 2m^3}{2m + 1 + m^2} = \frac{ma + m^3 + 2m^2 + m}{2m + 1 + m^2}$$

$$= m\left(\frac{a + m^2 + 2m + 1}{2m + 1 + m^2}\right)$$

10.° Si sostituisca pure in (φ'), e si avrà

$$z = \frac{x}{m} + 1 = \frac{a - m^2 - 2m - 1}{2m + 1 + m^2} + 1 = \frac{a - m^2 - 2m - 1 + 2m + 1 + m^2}{2m + 1 + m^2} = \frac{a}{2m + 1 + m^2}$$

11.° Finalmente si ponga in (φ''), e si otterrà

$$u = \frac{m^2 a - m^4 - 2m^3 - m^2}{2m + 1 + m^2} + m^2 = \frac{m^2 a - m^4 - 2m^3 - m^2 + 2m^3 + m^2 + m^4}{2m + 1 + m^2} = \frac{am^2}{2m + 1 + m^2}$$

Conclusione

Dunque il 1.° mercante avrà posto in società lir. $m\left(\frac{a - m^2 - 2m - 1}{2m + 1 + m^2}\right)$; il 2.° $m\left(\frac{a + m^2 + 2m + 1}{2m + 1 + m^2}\right)$; il 3.° $\frac{a}{2m + 1 + m^2}$; ed il 4.° $\frac{m^2 a}{2m + 1 + m^2}$

Verificazione

1.° Queste quattro parti sommate fra loro debbono formare il capitale a. Ed è infatti

$$\frac{ma-m^3-2m^2-m+ma+m^3+2m^2+m+a+m^2a}{2m+1+m^2}=\frac{2ma+m^2a+a}{2m+1+m^2}=a\left(\frac{2m+1+m^2}{2m+1+m^2}\right)=a$$

2.° La parte del 1.° accresciuta della quantità m sarà

$$\frac{ma-m^3-2m^2-m}{2m+1+m^2}+m=\frac{ma-m^3-2m^2-m+2m^2+m+m^3}{2m+1+m^2}=\frac{ma}{2m+1+m^2}=\varphi$$

E la parte del 2.° scemata della quantità m dà similmente

$$\frac{ma+m^3+2m^2+m}{2m+1+m^2}-m=\frac{ma+m^3+2m^2+m-2m^2-m-m^3}{2m+1+m^2}=\frac{ma}{2m+1+m^2}=\varphi$$

Colla stessa facilità si verificherebbero le altre due condizioni del problema.

Applicazione

Supponiamo, che la parte del 1.° più 8 sia eguale alla parte del 2.° meno 8, alla parte del 3.° moltiplicata per 8, ed alla parte del 4.° divisa per 8; e che l'intero capitale sia lir. 2349. Avremo

$$a=2349\,;\,m=8$$

Dunque $x=8\left(\frac{2349-64-16-1}{16+1+64}\right)=8\left(\frac{2349-81}{81}\right)=\frac{8\,.\,2268}{81}=\frac{8\,.\,81\,.\,28}{81}=224$

$$y=8\left(\frac{2349+64+16+1}{16+1+64}\right)=\frac{8\,.\,2430}{81}=\frac{8\,.\,81\,.\,30}{81}=240$$

$$z=\frac{2349}{16+1+64}=\frac{2349}{81}=\frac{29\,.\,81}{81}=29$$

$$u=\frac{64\,.\,2349}{16+1+64}=\frac{64\,.\,29\,.\,81}{81}=1856$$

Conclusione

Dunque il 1.° negoziante avrà contribuito lir. 224; il 2.° lir. 240; il 3.° lir. 29; ed il 4.° lir. 1856.

Verificazione

1.° La parte del 1.° più 8 dà lir. $224+8=232$; e la parte del 2.° meno 8 dà essa pure $240-8=232$. 2.° La parte del 3.° moltiplicata

per 8, è $29 \times 8 = 232$. 3.° La parte del 4.° divisa per 8 è similmente $\frac{1856}{8} = 232$. 4.° Finalmente le quattro parti formano la somma totale $224 + 240 + 29 + 1856 = 2349$.

Problema LXI.

Quattro navi guerriere hanno tirato in varie zuffe alcuni colpi di cannone. Si sa, che la 1.ª, la 2.ª, e la 3.ª hanno tirato colpi a: la 1.ª, la 2.ª, e la 4.ª colpi m; la 1.ª, la 3.ª, e la 4.ª colpi c; e finalmente la 2.ª, la 3.ª, e la 4.ª colpi e. Quanti colpi separatamente ha tirato ciascuna nave.

Raziocinio per le Equazioni

Sia x il numero de' colpi tirati dalla 1.ª, y dalla 2.ª, z dalla 3.ª, u dalla 4.ª Espresse le quattro combinazioni accennate nel problema si otterranno le seguenti

Equazioni del Problema

1.ª $x + y + z = a$ 2.ª $x + y + u = m$

3.ª $x + z + u = c$ 4.ª $y + z + u = e$

Soluzione

Sciolto questo problema coll'andamento del problema 59.° si avrà

$$x = \frac{a + m + c - 2e}{3}; \; y = \frac{m - 2c + a + e}{3}; \; z = \frac{a - 2m + e + c}{3}; \; u = \frac{e - 2a + m + c}{3}$$

Conclusione

Dunque i colpi tirati dalla 1.ª nave saranno . . $\frac{a + m + c - 2e}{3}$

Dalla 2.ª . . . . . $\frac{m - 2c + a + e}{3}$

Dalla 3.ª . . . . . $\frac{a - 2m + e + c}{3}$

Dalla 4.ª . . . . . $\frac{e - 2a + m + c}{3}$

Verificazione

1.° Dalla riunione delle formole trovate per x, y, z dobbiamo avere a. Ed è infatti

$$\frac{a+m+c-2e+m-2c+a+e+a-2m+e+c}{3}=\frac{2m-2m+2c-2c+2e-2e+3a}{3}=\frac{3a}{3}=a$$

Nella stessa maniera si potrebbero agevolmente verificare anche le altre tre equazioni.

Applicazione

Supponiamo, che le prime tre navi abbiano tirato colpi 60; che le prime due, e l'ultima ne abbiano tirato 70; che la 1.ª, e le ultime due ne abbiano tirato 80; finalmente che le ultime tre ne abbiano tirato 90. Avremo

$$a=60\ ;\ m=70\ ;\ c=80\ ;\ e=90$$

$$\text{Dunque } x=\frac{60-180+70+80}{3}=\frac{210-180}{3}=\frac{30}{3}=10$$

$$y=\frac{90+70+60-160}{3}=\frac{220-160}{3}=\frac{60}{3}=20$$

$$z=\frac{90-140+80+60}{3}=\frac{230-140}{3}=\frac{90}{3}=30$$

$$u=\frac{90+70+80-120}{3}=\frac{240-120}{3}=\frac{120}{3}=40$$

Conclusione

Dunque la 1.ª nave ha tirato colpi 10. La 2.ª 20. La 3.ª 30. La 4.ª 40

Verificazione

1.° $10+20+30=60$; 2.° $10+20+40=70$; 3.° $10+30+40=80$; 4.° $20+30+40=90$

Problema LXII.

Vi sono due mandre di pecore, che si lasciano pascolare in due prati, mangiando entro un dato tempo l'erbe, che vi erano al primo istante, e quelle, che successivamente vi crescono nel tempo impiegato pel pascolo, e che vi crescono uniformemente. Si domanda quante pecore vi abbisognerebbero per mangiare, sotto le medesime condizioni, l'erbe di un terzo prato.

Rappresenti a il numero delle pecore della 1.ª mandra, che si pascola nel 1.° prato, la cui estensione sia b, e c sia il tempo, in cui tutte l'erbe cresciute, e crescenti si consumano.

Sia d il numero delle pecore della 2.ª mandra, che mangia nel 2.° prato, la cui estensione sia e, ed f sia il tempo, in cui si consumano l'erbe cresciute, e le crescenti.

Esprima x finalmente il numero delle pecore della 3.ª mandra, che dovrebbe pascolare nel 3.° prato, la cui estensione sia g, ed il tempo da impiegarsi pel consumo dell' erbe cresciute, e crescenti sia h.

Supponiamo ora, che ciascuna mandra si divida in due parti, una delle quali mangi l'erba, ch'eravi in ciascun prato nel primo istante del pascolo, e l'altra mangi l'erbe, che successivamente crescono nel tempo del pascolo. La 1.ª parte della 1.ª mandra sia y. La 2.ª parte sarà $a-y$. Lo stesso facciasi colle altre due mandre. La 1.ª parte della 2.ª mandra sia z. La 2.ª parte sarà $d-z$. La 1.ª parte della 3.ª mandra sia u. La 2.ª parte sarà $x-u$. Trattasi pertanto di determinare le quattro incognite x, y, z, u per le date a, b, c, d, e, f, g, h.

Ciò posto: egli è chiaro, che le prime parti delle tre mandre, cioè y, z, u stanno fra loro come le estensioni de' prati, ne' quali pascolano, divise pei tempi corrispondenti impiegati nel pascolo, cioè in ragion diretta delle estensioni, ed inversa dei tempi; poichè abbisogna un numero altrettanto maggiore di pecore per mangiare una quantità costante, e data d'erbe contenute in un prato, quanto è maggiore l'estensione del prato istesso, e quanto è minore la durata del tempo impiegato a consumar l'erbe. Avremo dunque le due proporzioni

$$(A) \qquad y : z :: \frac{b}{c} : \frac{e}{f}$$

$$(B) \qquad y : u :: \frac{b}{c} : \frac{g}{h}$$

Le seconde parti poi delle tre mandre $a-y$, $d-z$, $x-u$, le quali consumano l'erbe crescenti nel tempo del pascolo, staranno fra loro semplicemente come le estensioni de' prati. I tempi non entrano in queste proporzioni; poichè, per ipotesi, l'erbe crescono in quantità eguali, e in tempi eguali, crescendo uniformemente, e sono consumate in proporzione, che crescono. Da ciò ne viene in conseguenza, che le quantità totali

di queste medesim' erbe sono proporzionali al numero delle pecore, che le consumano; e perciò essendo pure proporzionali alle estensioni dei prati, si avranno quest' altre due proporzioni

$$(C) \qquad a - y : d - z :: b : e$$

$$(D) \qquad a - y : x - u :: b : g$$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj nelle proporzioni (A), (B), (C), (D) si otterranno le seguenti

Equazioni del Problema

$$1.^a \quad \frac{ey}{f} = \frac{bz}{c}$$

$$2.^a \quad \frac{gy}{h} = \frac{bu}{c}$$

$$3.^a \quad ae - ey = db - bz$$

$$4.^a \quad ag - gy = bx - bu$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi la 1.ª per c. 2.° Si divida per b. 3.° Si ordini per z, e sarà

$$z = \frac{cey}{fb} \qquad (\varphi)$$

4.° Si moltiplichi la 2.ª per c. 5.° Si divida per b. 6.° Si ordini per u, e si avrà

$$u = \frac{cgy}{hb} \qquad (\varphi')$$

7.° Si sostituisca (φ) nella 3.ª 8.° Si moltiplichi per f. 9.° Si aggiunga cey, e si sottragga aef. 10.° Si cangino i segni all' equazione, e si sciolga la y ne' suoi fattori. 11.° Si divida pel coefficiente della y, che ne sorte, e si avrà

$$y = \frac{f}{e}\left(\frac{ae - db}{f - c}\right) \qquad (\varphi'')$$

12.° Si sostituisca il valore (φ'') in (φ'), e sarà

$$u = \frac{gcf}{beh}\left(\frac{ae - db}{f - c}\right) \qquad (\varphi''')$$

13.° Si sostituisca lo stesso valore in (φ), e riuscirà

$$z = \frac{cef}{feb}\left(\frac{ae - db}{f - c}\right) = \frac{c}{b}\left(\frac{ae - db}{f - c}\right)$$

14.° Si sostituisca lo stesso valore, e l'altro (φ''') nella 4.ª equazione del problema, e si otterrà

$$ag - \frac{gf}{e}\left(\frac{ae-db}{f-c}\right) = bx - \frac{bgcf}{bhe}\left(\frac{ae-db}{f-c}\right)$$

15.° Finalmente eseguendo le accennate moltipliche, ed eliminando i denominatori si avrà

$$x = \frac{aceg\,(f-h) + bdfg\,(h-c)}{beh\,(f-c)} \qquad (M)$$

Conclusione

Dunque la formola (M) rappresenterà il numero delle pecore, che abbisogneranno per consumare l'erbe del 3.° prato.

Verificazione

Faremo soltanto, per non dilungarci di troppo, la verificazione d'una sola delle proporzioni, che ci hanno dato le equazioni del problema. Prendasi la 1.ª, la quale si trasformerà nella seguente, sostituendovi i valori trovati per la y, e per la z

$$\frac{f}{e}\left(\frac{ae-db}{f-c}\right) : \frac{c}{b}\left(\frac{ae-db}{f-c}\right) :: \frac{b}{c} : \frac{e}{f}$$

Prescindendo dalla quantità $\frac{ae-db}{f-c}$ comune ai termini della 1.ª ragione si avrà

$$\frac{f}{e} : \frac{c}{b} :: \frac{b}{c} : \frac{e}{f}$$

dove si verifica il prodotto degli estremi $\frac{fe}{fe} = 1$, e quello de' medj $\frac{bc}{bc} = 1$

Applicazione

Supponiamo, che il 1.° prato abbia tornature 4 di estensione, il 2.° 5, e il 3.° 6; che pecore 8 abbisognino per mangiare in 7 giorni l'erbe del 1.°, e 9 per mangiare quelle del 2.° in 8 giorni. Quante pecore abbisogneranno per mangiare in 12 giorni l'erbe del 3.° prato. Avrassi

$$a=8\ ;\ b=4\ ;\ c=7\ ;\ d=9\ ;\ e=5\ ;\ f=8\ ;\ g=6\ ;\ h=12$$

Dunque $x = \frac{8\,.\,7\,.\,5\,.\,6\,(8-12)+4\,.\,9\,.\,8\,.\,6\,(12-7)}{4\,.\,5\,.\,12\,(8-7)} = \frac{8640-6720}{240} = \frac{1920}{240} = 8$

Conclusione

Dunque abbisogneranno 8 pecore per consumare l'erbe del 3.° prato.

Verificazione

Verifichiamo l'ultima delle quattro proporzioni, cioè $a-y : x-u :: b : g$. A tale oggetto bisogna cominciare a sostituire i valori cogniti nelle altre due formole esprimenti il valore della y, e della u. Avrassi pertanto

$$y = \frac{8\,(40-36)}{5\,(8-7)} = \frac{8\,.\,4}{5\,.\,1} = \frac{32}{5}$$

$$u = \frac{6\,.\,7\,.\,8\,\,(40-36)}{4\,.\,5\,.\,12\,\,(8-7)} = \frac{6\,.\,7\,.\,8\,.\,4}{4\,.\,5\,.\,12\,.\,1} = \frac{6\,.\,7\,.\,8}{5\,.\,12} = \frac{7\,.\,8}{5\,.\,2} = \frac{7\,.\,4}{5} = \frac{28}{5}$$

Quindi la nostra proporzione diventerà

$$8 - \frac{32}{5} : 8 - \frac{28}{5} :: 4 : 6$$

Moltiplicando per 5 la 1.ª ragione . . . . . $40-32 : 40-28 :: 4 : 6$

Riducendo . . . . . $8 : 12 :: 4 : 6$

Dividendo per 2 la 1.ª ragione si avrà la proporzione identica, che verifica il problema

$$4 : 6 :: 4 : 6$$

PROBLEMI DI SECONDO GRADO AD UNA E PIÙ INCOGNITE

Problema LXIII.

Trovar tre numeri in proporzione continua geometrica per modo, che la somma dei due primi sia 10, e 24 sia la differenza dei due ultimi.

Raziocinio per l'Equazione

Chiamisi x il 1.° numero. Il 2.° sarà $10-x$, perchè la somma dei due primi debb'essere 10, e il 3.° $34-x$, perchè la differenza, che

passa tra i due ultimi debb'essere 24. Instituendo la proporzione geometrica continua accennata nel problema si avrà

$$x : 10 - x :: 10 - x : 34 - x$$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$x^2 - 20x + 100 = 34x - x^2$$

Soluzione

1.° Si aggiunga x^2. 2.° Si sottragga $34x$, e 100. 3.° Si divida per 2. 4.° Si compisca il quadrato. 5.° Si estragga la radice attualmente nel 1.° membro, e si accenni nel 2.° 6.° Si aggiunga $\frac{27}{2}$, e si avrà

$$x = \frac{27}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{529}{4}\right)} = \frac{27 \pm 23}{2}.$$

Conclusione

Dunque preso il segno superiore si avrà $x = \frac{50}{2} = 25$. Il 1.° numero sarà pertanto 25. Il 2.° $10 - 25$, ossia -15. Il 3.° $34 - 25$, ossia 9.

Preso il segno inferiore si avrà $x = \frac{4}{2} = 2$. Il 1.° numero sarà quindi 2. Il 2.° $10 - 2$, ossia 8. Il 3.° $34 - 2$, ossia 32.

Verificazione

Prendiamo a verificare la 2.ª soluzione, siccome quella, che ci dà tre numeri positivi. I numeri sono 2, 8, 32. Questi sono in proporzione geometrica continua, perchè 2 sta in 8 quattro volte, come 8 sta quattro volte in 32; la somma dei due primi è 10; e la differenza dei due ultimi è 24.

Problema LXIV.

Trovar due numeri, di cui sia data la somma, o la differenza dei quadrati, e in cui sia pur cognito il rapporto, che passa fra loro.

Raziocinio per l'Equazione

Sia il rapporto de' numeri :: $m : n$, e p esprima tanto la somma, quanto la differenza cognita de' loro quadrati. Assunta x per quantità comune ai due numeri, se moltiplicheremo questa quantità pel rapporto di un numero all'altro, uno de' numeri sarà mx, e l'altro nx. I loro quadrati saranno perciò m^2x^2, n^2x^2. Ma questi sommati, o sottratti debbono essere uguali a p. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$m^2x^2 \pm n^2x^2 = p$$

Soluzione

1.° Si sciolga la x^2 ne' suoi fattori. 2.° Si divida pel coefficiente, che n' emerge. 3.° Si estragga la radice, e si avrà

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{m^2 \pm n^2}\right)}$$

Conclusione

Dunque uno de' numeri sarà $\pm m\sqrt{\left(\frac{p}{m^2 \pm n^2}\right)}$, e l'altro $\pm n\sqrt{\left(\frac{p}{m^2 \pm n^2}\right)}$

Verificazione

Il quadrato del 1.° sarà $\frac{m^2p}{m^2 \pm n^2}$, e quello del 2.° $\frac{n^2p}{m^2 \pm n^2}$

1.° Se p nota la somma, presi i due numeri col segno superiore, sarà precisamente

$$\frac{m^2p}{m^2 + n^2} + \frac{n^2p}{m^2 + n^2} = p\left(\frac{m^2 + n^2}{m^2 + n^2}\right) = p$$

2.° Se p nota la differenza, preso il segno inferiore, e sottratto il 2.° numero al 1.°, si avrà infatti

$$\frac{m^2p}{m^2 - n^2} - \frac{n^2p}{m^2 - n^2} = p\left(\frac{m^2 - n^2}{m^2 - n^2}\right) = p$$

3.° I due numeri poi hanno evidentemente il rapporto di $m:n$, non essendo essi, che la stessa quantità rappresentante x moltiplicata per questo rapporto.

Applicazione per la Somma

Sia il rapporto di 3 : 2. La somma de' quadrati debba essere 325. Avrassi

$$m=3\ ;\ n=2\ ;\ p=325$$

Sostituiti questi valori nella formola trovata per x, preso il segno superiore, che si riferisce alla somma, si avrà

$$x=\sqrt{\left(\frac{325}{9+4}\right)}=\sqrt{\left(\frac{325}{13}\right)}=\sqrt{25}=5$$

Conclusione

Dunque il 1.° numero sarà 3×5, ossia 15; ed il 2.° 2×5, ossia 10.

Verificazione

1.° I due numeri debbono stare fra loro :: 3 : 2, ed è infatti

$$15:10::3:2$$

verificandosi il prodotto degli estremi eguale a quello de' medj.
2.° Il quadrato di 15 è 225; quello di 10 è 100. Ed è $225+100=325$

Applicazione per la Sottrazione

Ritengasi lo stesso rapporto, e facciasi la differenza de' quadrati eguale a 25. Sarà $p=25$. Sostituiti i valori cogniti nella formola trovata per x, preso il segno inferiore, che si riferisce alla sottrazione, si avrà

$$x=\sqrt{\left(\frac{25}{9-4}\right)}=\sqrt{\left(\frac{25}{5}\right)}=\sqrt{5}$$

Conclusione

Dunque il 1.° numero sarà $3\sqrt{5}$, ed il 2.° $2\sqrt{5}$

Verificazione

1.° I due numeri stanno fra loro :: 3 : 2, ed è infatti

$$3\sqrt{5}:2\sqrt{5}::3:2$$

perchè divisa la 1.ª ragione per $\sqrt{5}$ si ha la proporzione identica

$$3 : 2 :: 3 : 2$$

2.° Il quadrato del 1.° numero è 45; quello del 2.° è 20. Ed è $45 - 20 = 25$

Problema LXV.

Trovar tre numeri, di cui si conoscono i prodotti presi due a due.

Raziocinio per l'Equazione

Sia m il prodotto del 1.° numero nel 2.°; m' del 1.° nel 3.°; m'' del 2.° nel 3.° Se supporrassi x il 1.° numero; il 2.° sarà $\frac{m}{x}$, perchè $\frac{m}{x}$ moltiplicato nel 1.° numero x dà il prodotto m accennato nel problema; ed il 3.° per la stessa ragione sarà $\frac{m'}{x}$. Ma per condizione del problema il prodotto del 2.° nel 3.° debb'essere m''. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{m}{x} \cdot \frac{m'}{x} = m''$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per x^2. 2.° Si divida per m''. 3.° Si estragga la radice, quindi si ordini per x e sarà

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{m\,m'}{m''}\right)} = \pm\sqrt{\left(\frac{m\,m'\,m''}{m''\,.\,m''}\right)} = \pm\frac{\sqrt{m\,m'\,m''}}{m''}$$

Conclusione

Preso il solo segno superiore, giacchè anche preso l'inferiore si avrebbe lo stesso risultamento ne' prodotti dei numeri

Il 1.° numero sarà . . . . . $\frac{\sqrt{m\,m'\,m''}}{m''}$

Il 2.° numero sarà . . . . . $\frac{m}{x} = \frac{m}{\frac{\sqrt{m'\,m\,m''}}{m''}} = \frac{m\,m''}{\sqrt{m\,m'\,m''}}$

Il 3.° numero sarà . . . . . $\frac{m'}{x} = \frac{m'}{\frac{\sqrt{m\,m'\,m''}}{m''}} = \frac{m'\,m''}{\sqrt{m\,m'\,m''}}$

Verificazione

Veggiamo se il prodotto del 2.° nel 3.° numero dà m''. Ed è realmente così, poichè si ha

$$\frac{m\,m''}{\sqrt{m\,m'\,m''}} \times \frac{m'\,m''}{\sqrt{m\,m'\,m''}} = \frac{m\,m'\,m''\,m''}{m\,m'\,m''} = m''$$

Colla stessa facilità si verificherebbero anche gli altri due prodotti.

Applicazione

Sia il prodotto del 1.° nel 2.° 40; del 1.° nel 3.° 48; del 2.° nel 3.° 30. Sarà

$$m = 40\,;\ m' = 48\,;\ m'' = 30$$

Dunque $x = \frac{\sqrt{(40 \,.\, 48 \,.\, 30)}}{30} = \sqrt{\left(\frac{57600}{900}\right)} = \sqrt{\left(\frac{576}{9}\right)} = \frac{24}{3} = 8$

Conclusione

Dunque il 1.° numero sarà 8. Il 2.° $\frac{40}{8} = 5$. Il 3.° $\frac{48}{8} = 6$

Verificazione

Prodotto del 1.° nel 2.° . . . . . $8 \,.\, 5 = 40$
Del 1.° nel 3.° . . . . . $8 \,.\, 6 = 48$
Del 2.° nel 3.° . . . . . $5 \,.\, 6 = 30$

Problema LXVI.

Cercansi i lati di un rettangolo, la cui superficie sia p, e le cui dimensioni stieno nella ragione di $m : n$.

Raziocinio per l'Equazione

Assumasi una lunghezza x comune ai due lati contigui del rettangolo. Avremo il valore di ciascun lato moltiplicando x per la ragione, in cui stanno questi lati; onde un suo lato sarà mx, e l'altro nx. Ma la superficie del rettangolo, come abbiamo dalla Geometria, risulta dalla moltiplica dei due lati contigui, e questa superficie debb'essere uguale a p. Dunque avremo la seguente

Equazione del Problema

$$mx \,.\, nx = p$$

Soluzione

1.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 2.° Si divida per mn. 3.° Si estragga la radice, e preso il solo segno positivo, perchè il negativo nel prodotto dei due lati dà il medesimo risultamento, si avrà

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{mn}\right)}$$

Conclusione

Dunque uno de' lati del rettangolo sarà $m\sqrt{\left(\frac{p}{mn}\right)}$, e l'altro $n\sqrt{\left(\frac{p}{mn}\right)}$

Verificazione

1.° Debb' essere $m : n$ il rapporto dei lati, e infatti dividendo per $\sqrt{\left(\frac{p}{mn}\right)}$ la 1.ª ragione della proporzione

$$m\sqrt{\left(\frac{p}{mn}\right)} : n\sqrt{\left(\frac{p}{mn}\right)} :: m : n$$

si ha la proporzione identica $m : n :: m : n$.
2.° Il prodotto poi dei due lati, ossia il rettangolo debb' essere p. Ed è realmente

$$m\sqrt{\left(\frac{p}{mn}\right)} \times n\sqrt{\left(\frac{p}{mn}\right)} = \frac{mnp}{mn} = p$$

Applicazione

Vogliansi i lati di un rettangolo, che ha metri quadrati 50 di superficie, i quali stiano fra loro $:: 2 : 1$. Avremo

$$p = 50 \,;\, m = 2 \,;\, n = 1$$

E conseguentemente sarà $x = \sqrt{\left(\frac{50}{2}\right)} = \sqrt{25} = 5$

Conclusione

Dunque uno de' lati sarà $2 \,.\, 5 = 10$; e l'altro $1 \,.\, 5 = 5$

Verificazione

1.° Si verifica il rapporto de' lati $10:5::2:1$, nella quale proporzione il prodotto degli estremi eguaglia quello de' medj.
2.° La superficie poi del rettangolo è $10 . 5 = 50$, come doveasi verificare.

Problema LXVII.

Un mercante comperò una quantità di zuccaro per lir. 600. Levonne libb. 150 per proprio uso, e vendette il rimanente per lir. 540, guadagnando 10 centesimi per ogni libbra. Si domanda quante libbra di zuccaro avesse comperato, e quanto lo avesse pagato alla libbra.

Raziocinio per l' Equazione

Chiamisi x il numero delle libbra di zuccaro comperate dal mercante. Egli è chiaro, che la somma sborsata in totale divisa pel numero delle libbra comperate equivalerà al prezzo di ciascuna libbra. Dunque il mercante avrà pagato lo zuccaro lir. $\frac{600}{x}$ alla libbra. Se il mercante riserva a proprio uso libb. 150, il numero delle libbra, che rivende sarà $x - 150$. Questo numero di libbra è stato rivenduto a lire $\frac{600}{x} + \frac{10}{100}$, ossia a lire $\frac{600}{x} + \frac{1}{10}$, perchè oltre al prezzo sborsato il mercante guadagna 10 centesimi. Ma questa rivendita importa lir. 540. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\left(x - 150\right)\left(\frac{600}{x} + \frac{1}{10}\right) = 540$$

Soluzione

1.° Eseguendo l'accennata moltiplica l' equazione diventerà

$$x^2 + 450x = 90000$$

2.° Si faccia $p = 450$; $q = 90000$, e presa la soluzione generale di 2.° grado (Vedi Brunacci Elem. cit. pag. 84 n.° 176) si avrà

$$x = \frac{-450 \pm \sqrt{(202500 + 3600000)}}{2} = \frac{-450 \pm \sqrt{3802500}}{2} = \frac{-450 \pm 1950}{2}$$

Conclusione

Dunque, preso il segno superiore, che solo corrisponde alle condizioni del problema, sarà

$$x = \frac{-450 + 1950}{2} = \frac{1500}{2} = 750$$

E conseguentemente il mercante avrà comperato libb. 750 di zuccaro, e l'avrà pagato alla libbra lire $\frac{600}{750} = 0,80$

Verificazione

Levate 150 libb. da 750 restano libb. 600, che vendute a lir. 0, 90 alla libbra, cioè 10 cent. di più del primo costo, danno precisamente lir. 540

Problema LXVIII.

Tre compagnie d'operaj lavorando insieme farebbero un'opera in 15 ore. Ma se lavorassero separatamente i primi impiegherebbero $\frac{4}{5}$ del tempo de' secondi, e questi 15 ore meno degli ultimi. Quanto tempo impiegherà ciascuna compagnia.

Raziocinio per l'Equazione

S'indichi per x il tempo impiegato dai secondi. Quello de' primi sarà $\frac{4x}{5}$, e quello degli ultimi $x + 15$; perciò quanto ciascuna compagnia fa all'ora sarà rispettivamente espresso dalle frazioni $\frac{1}{\frac{4x}{5}}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+15}$.

Chè se per 1 rappresenterassi l'opera intera, le tre compagnie facendola in ore 15, converrà moltiplicare per 15 queste frazioni, e sommate daranno la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{15}{\frac{4x}{5}} + \frac{15}{x} + \frac{15}{x+15} = 1$$

Soluzione

1.° Ridotta la 1.ª frazione ad essere $\frac{75}{4x}$ si moltiplichi per $4x^3 + 60x^2$. 2.° Si dividano tutti i termini per x. 3.° Si semplifichi l'equazione, e quindi la si divida per 4, e sarà

$$x^2 - \frac{135x}{4} = \frac{2025}{4}$$

4.° Sciolta questa equazione come quella del problema 67.° si avrà

$$p = -\frac{135}{4}\ ;\ q = \frac{2025}{4}$$

Dunque $x = \frac{135}{8} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{50625}{16}\right)} = \frac{135 \pm 225}{8}$

Conclusione

Preso il segno superiore, che solo corrisponde al problema, sarà

$$x = \frac{135 + 225}{8} = \frac{360}{8} = 45$$

E quindi l'opera intera sarebbe fatta dalla 1.ª compagnia isolatamente in ore $\frac{4}{5} \times 45$, ossia 36; dalla 2.ª in ore 45; e dalla 3.ª in 60 ore.

Verificazione

Le tre compagnie in un'ora farebbero insieme $\frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{60} = \frac{1}{15}$ dell'opera, e quindi l'opera intera, come porta il problema, in ore $\frac{1}{15} \times 15 = 1$

Problema LXIX.

Si è fatto un convito, che costò scudi a. Un numero di convitati m non avendo pagato, gli altri dovettero pagare scudi π di più di quello, che avrebbero sborsato, se tutti avessero pagato. Cercasi il numero de' convitati.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero de' convitati. Se tutti avessero pagato è evidente,

che ciascuno avrebbe pagato $\frac{a}{x}$. Ma un numero m non ha pagato. Dunque ciascuno di quelli, che hanno pagato, avrà dovuto sborsare $\frac{a}{x-m}$. Ma la differenza, che passa tra quello, che per questa deficienza hanno pagato, e quello, che dovevano pagare, se tutti avessero contribuito, è π. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{a}{x-m} - \frac{a}{x} = \pi$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per $x^2 - mx$. 2.° Si riduca l'equazione, e si ordini per x^2. 3.° Si divida per π, e sarà

$$x^2 - mx = \frac{am}{\pi}$$

4.° Si compisca il quadrato. 5.° Si estragga la radice. 6.° Si aggiunga $\frac{m}{2}$, e semplificato il radicale si otterrà

$$x = \frac{m \pm \sqrt{\left(\frac{m}{\pi}(m\pi + 4a)\right)}}{2} \qquad (A)$$

Conclusione

Dunque il numero de' convitati sarà rappresentato dalla formola (A)

Verificazione

Verificheremo la soluzione coll'applicarla ad un caso particolare, in cui si otterrà il chiesto numero de' convitati, se i valori dati all' espressione generale saranno tali, che la quantità sotto il radicale sia un quadrato perfetto.

Applicazione

Suppongasi, che la spesa totale sia di scudi 12, che il numero di quelli, che non hanno pagato sia 2, e che perciò ciascuno degli altri abbia dovuto pagare uno scudo di più. Avrassi

$$a = 12 ; m = 2 ; \pi = 1$$

Dunque $x = \frac{2 \pm \sqrt{\left(\frac{2}{1}(2+48)\right)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{2 \pm 10}{2} = 1 \pm 5$

Conclusione

Preso il segno superiore, non soddisfacendo l'inferiore al problema, sarà $x = 6$, e quindi 6 sarà il numero de' convitati.

Verificazione

Se tutti avessero pagato, la spesa di ciascuno sarebbe stata di scudi $\frac{12}{6}$, ossia di scudi 2; ma due non avendo pagato, ciascuno di quelli, che hanno pagato, avrà dovuto sborsare scudi $\frac{12}{4}$, ossia scudi 3, cioè uno scudo di più di quello, che avrebbe pagato, se tutti avessero contribuito al pagamento.

Problema LXX.

Un operajo riscuote lire a per mercede dovutagli di un numero di giorni di lavoro eguale alla mercede, che riceve in ciascun giorno. Si cerca quanti giorni abbia lavorato, e quindi quanto guadagnasse al giorno.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero de' giorni, in cui ha lavorato; la mercede per ogni giorno sarà pure x. Tutta la mercede riscossa sarà pertanto x^2. Ma questa equivale a lire a. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$x^2 = a$$

Soluzione

Si estragga la radice da questa equazione pura, e si avrà $x = \pm\sqrt{a}$

Conclusione

Dunque avrà lavorato per giorni $\sqrt{a}$, ed avrà guadagnato al giorno $\sqrt{a}$

Verificazione

L' importo di giorni espressi da $\sqrt{a}$ a lire $\sqrt{a}$ al giorno è $\sqrt{a}^2 = a$, come dice il problema.

Applicazione

Supponiamo, che la mercede totale fosse di lir. 20, e centes. 25. Avremo

$$a = 20,25$$

Dunque, preso il segno superiore, sarà $x = \sqrt{20,25} = \sqrt{\left(\frac{81,00}{4}\right)} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

Conclusione

Dunque avrà lavorato per quattro giornate, e mezza; ed avrà ricevuto al giorno lir. 4, 50.

Verificazione

Giornate $4\frac{1}{2}$ a lir. 4, 50 importano lir. 20, 25, come dice il problema.

Problema LXXI.

L'esercito di un Generale condotto all'assedio di una città formava un quadrato perfetto; ma per una improvvisa sortita fatta dagli assediati essendo rimaste uccise sul campo 6 file intere di un fianco, gli assedianti si ridussero a 13680 uomini. Di quanti uomini era composto tutto l'esercito prima della sortita.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero degli uomini componenti una fila, lato del quadrato. Tutto il quadrato sarà x^2. Ma tolte 6 intere file a questo quadrato, cioè $6x$, la forza dell'esercito riducesi a 13680 uomini. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$x^2 - 6x = 13680$$

Soluzione

Sciolta questa equazione come si è fatto con quella del problema 67.° si avrà

$$p = -6 \; ; \; q = 13680$$

Dunque $x = \frac{6 \pm \sqrt{(36 + 54720)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{54756}}{2} = \frac{6 \pm 234}{2} = \frac{240}{2} = 120$

assunto il segno superiore, che solo può soddisfare al problema.

Conclusione

Dunque l'esercito sarà stato di 14400 uomini innanzi la prima sortita.

Verificazione

Sei file danno uomini 720. Ed è realmente, come porta il problema, $14400 - 720 = 13680$.

Problema LXXII.

Con un certo numero di soldati si forma uno squadrone quadrato, ma tolte quattro intere file di fianco, e dispostine i soldati alle spalle, la lunghezza dello squadrone, che ne risulta, sta alla sua larghezza nella ragione di 9 : 4. Cercasi il numero degli uomini componenti lo squadrone.

Raziocinio per l'Equazione

Rappresenti x il numero degli uomini, di cui consta un lato dello squadrone. Il quadrato della x darà il totale degli uomini componenti l'esercito. Se da un lato leveremo 4 uomini, l'espressione del lato riescirà $x - 4$, ed avremo per condizione del problema la proporzione

$$x + \frac{4x}{x-4} : x - 4 :: 9 : 4 \qquad (Q)$$

Serviamoci della figura 76.ª tav. 5.ª per ben conoscere, come si ottenga questa proporzione. Sia lo squadrone quadrato $AERB$, il cui lato AE sia x. Se CB rappresenterà 4 uomini, la superficie $CBDR$ rappresenterà le 4 file levate di fianco, onde resterà $AC = AB - CB = x - 4$. Queste file sottratte, e poste alle spalle siano rappresentate dall'altro rettangolo $EFGD$. Noi qui avremo due rettangoli eguali, posti ad un

angolo eguale in D; onde per gli elementi di Geometria ci daranno la proporzione

$$CD : ED :: DG : DR$$

ossia, sostituite le rette eguali .... $CD : ED :: EF : CB$ (φ)

Ma $CD = AE = x$; $ED = AC = x - 4$; $CB = 4$. Dunque sostituiti questi valori in (φ) sarà

$$x : x - 4 :: EF : 4$$

da cui, fatto il prodotto degli estremi, e diviso per $x - 4$, si avrà $EF = \frac{4x}{x-4}$.

Dunque la lunghezza del nuovo squadrone sarà $AE + EF = x + \frac{4x}{x-4}$, e la sua larghezza sarà $x - 4$. Le quali quantità stando fra loro, per condizione del problema nella ragione di $9 : 4$ si otterrà la proporzione (Q). Fatto in essa il prodotto degli estremi, e quello de' medj si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$9x - 36 = 4x + \frac{16x}{x-4}$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per $x - 4$. 2.° Ridotti tutti i termini si divida per 5. 3.° Si sciolga l'equazione come al problema 69.°, e si avrà

$$x = \frac{36 \pm 24}{5}$$

Conclusione

Dunque preso il segno positivo, che solo corrisponde alle condizioni del problema, avrassi $x = \frac{36 + 24}{5} = \frac{60}{5} = 12$. Dunque lo squadrone conteneva 144 uomini.

Verificazione

Se da un lato dello squadrone quadrato, che ha 12 uomini di lato si toglieranno 4 uomini, la larghezza del rettangolo componente il nuovo squadrone sarà di 8 uomini, e la lunghezza, posti alle spalle gli uomini tolti al fianco, sarà $x + \frac{4x}{x-4} = 12 + \frac{48}{8} = 12 + 6 = 18$.

Quindi si verifica 1.°, che sta la lunghezza alla larghezza :: 9 : 4, essendo nella proporzione 18 : 8 :: 9 : 4 il prodotto degli estremi eguale a quello de'medj; 2.° che lo stesso numero di soldati, che componevano dapprima lo squadrone quadrato emerge dal nuovo squadrone, in cui si ha $18 \times 8 = 144$

Problema LXXIII.

Un Generale vorrebbe disporre un corpo di truppe in battaglione quadrato, ma nella 1.ª disposizione trova di più un numero φ di soldati, e aggiugnendo un uomo a ciascuna fila trova soldati φ' di meno. Quanti soldati ha il Generale.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero de' soldati componenti una fila nella 1.ª disposizione. Il numero totale de' soldati sarà $x^2 + \varphi$. Nella 2.ª il numero dei soldati componenti una fila sarà $x + 1$, e il totale sarà $x^2 + 2x + 1 - \varphi'$. Ma ambedue le disposizioni sonosi fatte collo stesso numero di soldati. Dunque avremo la seguente

Equazione del Problema

$$x^2 + 2x + 1 - \varphi' = x^2 + \varphi$$

Soluzione

1.° Si sottragga x^2. 2.° Si aggiunga φ'. 3.° Sottraggasi 1. 4.° Si divida per 2, e sarà

$$x = \frac{\varphi + \varphi' - 1}{2}$$

Conclusione

Dunque il numero de' soldati, che il Generale tiene a sua disposizione sarà espresso dalla formola $\left(\frac{\varphi + \varphi' - 1}{2}\right)^2 + \varphi$, o dall'altra $\left(\frac{\varphi + \varphi' + 1}{2}\right)^2 - \varphi'$

Verificazione

1.ª Disposizione. Si eseguisca il quadrato ... $\frac{\varphi^2 - 2\varphi + 2\varphi'\varphi - 2\varphi' + \varphi'^2 + 1}{4}$ Aggiunto φ moltiplicato, e diviso per 4, e semplificata la formola si avrà pel totale de' soldati

$$\frac{\varphi^2 + 2\varphi + 2\varphi'\varphi - 2\varphi' + \varphi'^2 + 1}{4}$$

2.ª Disposizione. Si eseguisca il quadrato . . $\frac{\varphi^2 + 2\varphi + 2\varphi'\varphi + 2\varphi' + \varphi'^2 + 1}{4}$

Sottratto φ' moltiplicato, e diviso per 4 si otterrà come nella 1.ª disposizione la formola rappresentante il totale de' soldati

$$\frac{\varphi^2 + 2\varphi + 2\varphi'\varphi - 2\varphi' + \varphi'^2 + 1}{4}$$

Applicazione

Si abbia nella 1.ª disposizione l'avanzo d'uomini 124, e ne manchino 129 per eseguire la 2.ª Sarà

$$\varphi = 124 \,;\, \varphi' = 129$$

Dunque $x = \frac{124 + 129 - 1}{2} = \frac{252}{2} = 126$

Conclusione

Ogni fila nella 1.ª disposizione conteneva adunque 126 uomini, e il corpo totale sarà stato $(126)^2 + 124 = 15876 + 124 = 16000$

Verificazione

Per verificazione vediamo se lo stesso numero emerge dalla 2.ª disposizione pel totale de' soldati. In essa ogni fila conteneva 127 soldati. Il quadrato di 127 è 16129, cioè il numero de' soldati, che realmente aveva il Generale, meno i 129 uomini, che gli mancavano per eseguire questa disposizione.

Problema LXXIV.

I salsiccioni impiegati nel rivestimento d'una batteria possono riguardarsi come cilindri retti. Coi materiali sufficienti per farne a d'atomi b di diametro se ne vorrebbero fare invece q della stessa lunghezza. Quale dovrà essere il loro diametro.

Raziocinio per l'Equazione

I volumi de' cilindri retti, come abbiamo dalla Geometria, aventi la stessa lunghezza sono proporzionali ai quadrati dei diametri. Ciò posto:

sia x il diametro cercato, ed m sia il volume de' materiali. Il volume di un cilindro della 1.ª specie sarà $\frac{m}{a}$, ed $\frac{m}{q}$ sarà quello di un cilindro della 2.ª. Avrassi pertanto la proporzione

$$\frac{m}{a} : \frac{m}{q} :: b^2 : x^2 \qquad (\mu)$$

Fatto in essa il prodotto degli estremi, e de' medj si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{mx^2}{a} = \frac{mb^2}{q}$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per a. 2.° Si divida per m. 3.° Si estragga la radice, e sarà

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{ab^2}{q}\right)} = \pm b \sqrt{\left(\frac{a}{q}\right)}$$

Conclusione

Dunque $b \sqrt{\left(\frac{a}{q}\right)}$ sarà il diametro cercato pei cilindri della 2.ª specie.

Verificazione

Posto il valore della x nella proporzione (μ) si ha

$$\frac{m}{a} : \frac{m}{q} :: b^2 : \frac{ab^2}{q}$$

E fatto il prodotto degli estremi, e de' medj si verifica $\frac{mb^2}{q} = \frac{mb^2}{q}$

Applicazione

Coi materiali sufficienti per fare 25 salsiccioni con 325 atomi (12 pollici) di diametro, se ne vogliono fare 36 della stessa lunghezza. Se ne cerca il diametro. Avrassi

$$a = 25 \; ; \; b = 325 \; ; \; q = 36$$

Dunque $x = 325 \sqrt{\left(\frac{25}{36}\right)} = \frac{325}{6} \sqrt{25} = \frac{325 \cdot 5}{6} = \frac{1625}{6}$

Conclusione

Dunque il chiesto diametro sarà di atomi $\frac{1625}{6}$, ossia di atomi 271, trascurate le cifre decimali oltre i millesimi. Questo diametro corrisponde prossimamente a pollici 10.

Verificazione

Prendiamo la soluzione in pollici, e verifichiamo la proporzione (μ), nella quale si sostituiscano i valori cogniti, ed il trovato diametro. Sarà

$$36 : 25 :: (12)^2 : (10)^2$$

Eseguendo i quadrati si avrà $36 : 25 :: 144 : 100$. E questa proporzione è vera, perchè il prodotto degli estremi è 3600, come lo è pure quello de' medj.

Problema LXXV.

La camera di un mortajo è un cilindro retto. Quella di un mortajo di pollici 12 (atomi 325), e quella di un mortajo di pollici 8 (atomi 217) hanno la stessa profondità. Il diametro della 1.ª è pollici 4, e linee 8 (atomi 126). Si domanda quello della 2.ª; sapendo di più, che la 1.ª camera contiene 1693 denari $\left(\text{libb. } 3 \text{ once } 7\frac{1}{3}\right)$, e la 2.ª denari 635 $\left(\text{once } 20\frac{3}{4}\right)$.

Raziocinio per l'Equazione

Le capacità dei cilindri, come si sa dalla Geometria, sono proporzionali ai quadrati dei diametri. Il peso della polvere inoltre, che può contenere ciascuna camera è evidentemente proporzionale alla sua capacità; quindi il peso sarà pure proporzionale al quadrato del diametro. Se dunque x rappresenti il diametro cercato, avremo la proporzione

$$1693 : 635 :: (126)^2 : x^2 \qquad (B)$$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$1693x^2 = 635(126)^2$$

Soluzione

1.° Dividasi per 1693. 2.° Si estragga la radice, e sarà

$$x = \pm 126 \sqrt{\left(\frac{635}{1693}\right)}$$

Conclusione

Preso il segno superiore, che solo corrisponde al problema, si avrà

$$x = 126 \sqrt{(0,375074)} = 126 \times 0,612 = 77$$

Conseguentemente il chiesto diametro sarà di atomi 77, ossia di pollici 2, e linee 10.

Verificazione

Basta sostituire ad x il valore quadrato, che abbiamo ritrovato nella proporzione (B), e in essa si verificherà il prodotto degli estremi eguale a quello de' medj. E infatti si ha

$$1693 : 635 :: (126)^2 : \frac{635\,(126)^2}{1693}$$

dove il prodotto degli estremi è $1693 \times \frac{635\,(126)^2}{1693} = 635\,(126)^2$, ch'è precisamente il prodotto de' medj.

Problema LXXVI.

Suppongasi, che l'altezza della scarpa di una batteria sia met. 2,274 nell'interno, e che la base sia met. 0,758. Calcolarne la lunghezza.

Raziocinio per l'Equazione

Dimostrasi in Geometria, che il quadrato della lunghezza di questa scarpa, rappresentata dall'ipotenusa di un triangolo rettangolo, è uguale alla somma de' quadrati della sua altezza, e della sua base, rappresentate queste dimensioni dai due cateti. Se dunque x sarà la lunghezza della scarpa avremo la seguente

Equazione del Problema

$$x^2 = (2,274)^2 + (0,758)^2$$

Soluzione

1.° Si eseguiscano i quadrati, e si sommino. 2.° Si estragga la radice, e sarà

$$x = \pm \sqrt{(5,745640)} = \pm 2,397$$

Conclusione

Dunque, preso il segno superiore, sarà $x = 2,397$, e quindi la scarpa sarà lunga metri 2, palmi 3, diti 9, atomi 7 prossimamente.

Verificazione

Facciasi il quadrato di 2, 397, e si avrà 5, 745609. Questo quadrato debb'essere uguale alla somma de' quadrati dell'altezza, e della base, la quale somma si è trovata 5, 745640. Non lo è precisamente; ma la differenza, proveniente dalla natura del calcolo decimale per le cifre oltre i millesimi trascurate nel valore della x, è tanto picciola, che si possono senza pericolo di error sensibile in pratica ritenere eguali quelle due espressioni.

Problema LXXVII.

Mario attaccò l'esercito de' barbari settentrionali con 50000 soldati. I nemici erano composti di Cimbri, di Teutonici, di Sciti, e di Sarmati. I Cimbri formavano la quindicesima parte del loro esercito; i Teutonici erano un tre-millesimo del quadrato del numero de' Cimbri, meno precisamente il numero de' Cimbri stessi; gli Sciti erano quanto i Cimbri; ed i Sarmati formavano la nona parte di tutto l'esercito più 70000 uomini. Si domanda quanti soldati avesse l'esercito barbaresco, e con quanti barbari doveva affrontarsi ciascun Romano.

Raziocinio per l'Equazione

Chiamisi x l'esercito barbaresco. I Cimbri, e gli Sciti saranno $\frac{2x}{15}$. I Teutonici $\frac{1}{3000} \times \frac{x^2}{15^2} - \frac{x}{15}$, ossia $\frac{x^2}{675000} - \frac{x}{15}$. I Sarmati $\frac{x}{9} + 70000$. Ma tutti questi corpi riuniti debbono formare l'esercito barbaresco. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{2x}{15} + \frac{x^2}{675000} - \frac{x}{15} + \frac{x}{9} + 70000 = x$$

Soluzione

1.° Si riducano i termini simili. 2.° Si sottragga x, e 70000. 3.° Si riducano allo stesso denominatore i termini contenenti la x, e sarà

$$\frac{x^2}{675000} - \frac{111x}{135} = -70000$$

4.° Si faccia $a = 675000$; $b = 111$; $c = 135$; $d = 70000$, e l'equazione del problema diventerà

$$\frac{x^2}{a} - \frac{bx}{c} = -d$$

5.° Si moltiplichi per a. 6.° Si compisca il quadrato. 7.° Si estragga la radice. 8.° Si aggiunga $\frac{ab}{2c}$, e si otterrà

$$x = \frac{ab \pm \sqrt{(a^2b^2 - 4adc^2)}}{2c} \qquad (A)$$

Conclusione

Dunque il numero de' soldati componenti l'esercito barbaresco sarà rappresentato dalla formola (A). Trovato poscia il rapporto, che passa tra il numero de' soldati dei due eserciti, vedremo con quanti barbari proporzionalmente dovevasi affrontare ciascun Romano.

Calcolo della Formola

$$x = \frac{675000 \,.\, 111 \pm \sqrt{(675000^2 \,.\, 111^2 - 4 \,.\, 675000 \,.\, 70000 \,.\, 135^2)}}{2 \,.\, 135}$$

$$x = \frac{74925000 \pm \sqrt{(455625000000 \,.\, 12321 - 4 \,.\, 675000 \,.\, 70000 \,.\, 18225)}}{270}$$

$$x = \frac{74925000 \pm \sqrt{(5613755625000000 - 344452500000000)}}{270}$$

$$x = \frac{74925000 \pm \sqrt{2169230625000000}}{270} = \frac{74925000 \pm 46575000}{270}$$

Conclusione

Dunque preso il segno superiore l'esercito de' barbari sarà

$$x = \frac{121500000}{270} = 450000$$

E preso l'inferiore sarebbe $x = \frac{28350000}{270} = 105000$

Verificazione del I.° Caso

Numero de' Cimbri . . . . . $\frac{x}{15} = \frac{450000}{15} = 30000$

Degli Sciti . . . . . $\frac{x}{15} = 30000$

De' Teutonici . $\frac{x^2}{675000} - \frac{x}{15} = \frac{450000^2}{675000} - 30000 = 270000$

De' Sarmati . . . $\frac{x}{9} + 70000 = \frac{450000}{9} + 70000 = 120000$

Totale dell' esercito barbaresco 450000

In questo caso ciascun Romano doveva proporzionalmente affrontarsi con 9 barbari, perchè i Romani essendo 50000, e i barbari 450000 si ha la proporzione 50000 : 450000 :: 5 : 45 :: 1 : 9.

Osservazione

La seconda soluzione non corrisponde alle condizioni del problema, perchè nell' espressione del numero de' Teutonici sortirebbe la quantità $\frac{6300000}{675}$, che non è un numero intero.

Problema LXXVIII.

A interrogato da B quante ore fossero, risponde: le ore dopo la mezzanotte stanno al quadrato delle ore avanti mezzodì nella ragione di $m : n$. Quante ore sono.

Raziocinio per l'Equazione

Si chiamino x le ore dopo la mezzanotte; quelle innanzi mezzodì saranno $12 - x$; onde avrassi la proporzione

$$x : (12 - x)^2 :: m : n$$

Eseguito il quadrato accennato, e fatto il prodotto degli estremi, e de' medj si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$mx^2 - 24mx + 144m = nx$$

Soluzione

1.° Si sottragga $144m$, ed nx. 2.° Si divida per m. 3.° Si sciolga la x sotto i suoi fattori. 4.° Si compisca il quadrato. 5.° Si estragga la radice. 6.° Si aggiunga 12, ed $\frac{n}{2m}$. 7.° Si riduca la formola al medesimo denominatore, e si avrà

$$x = \frac{24m + n \pm \sqrt{(48mn + n^2)}}{2m}$$

Conclusione

Dunque le ore dopo la mezzanotte saranno $\frac{24m + n \pm \sqrt{(48mn + n^2)}}{2m}$ (φ)

Verificazione

Ci dispensiamo dal verificare direttamente la formola generale; ma la verificheremo indirettamente nell' applicazione ad un caso particolare.

Applicazione

Le ore dopo la mezzanotte stiano al quadrato delle ore avanti mezzodì nella ragione di 1 : 2. Avremo

$$m = 1 \; ; \; n = 2$$

Dunque $x = \frac{24 + 2 \pm \sqrt{(96 + 4)}}{2} = \frac{26 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{26 \pm 10}{2}$

Conclusione

Preso il segno superiore le ore dopo la mezzanotte sarebbero $\frac{26 + 10}{2} = \frac{36}{2} = 18$, e le ore avanti mezzodì $12 - 18 = -6$.

Ciascun vede che questa soluzione, sebbene possa soddisfare all' equazione, pure non soddisfa alle condizioni del problema.

Preso il segno inferiore le ore dopo la mezzanotte saranno 8, e quelle innanzi mezzodì 4.

Verificazione

Le ore dopo la mezzanotte, cioè 8 stanno infatti al quadrato delle ore dopo mezzodì, cioè 16 nell' accennata ragione di 1 : 2, perchè nella proporzione 8 : 16 :: 1 : 2 si verifica il prodotto de' medj eguale a quello degli estremi.

Problema LXXIX.

Un giuocatore di lir. 160, che avea prima di giuocare ne ha perdute alcune; poi avendo guadagnato lir. 6298 non solo ricuperò il perduto, ma di più moltiplicò tante volte la perdita, quante erano le lire rimastegli dopo il primo giuoco. Si cerca quanto perdesse nel primo giuoco.

Raziocinio per l' Equazione

Sia x la perdita, di cui si cerca. Le lire rimastegli saranno $160-x$. Se moltiplicheremo $160-x$ per la perdita x avremo un prodotto, che dovrà eguagliare la vincita fatta, meno la prima perdita. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$(160-x)x=6298-x$$

Soluzione

1.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 2.° Si aggiunga x. 3.° Si cangino i segni all'equazione, e si ordini per x^2. 4.° Si sciolga questo problema, come il problema 67.°, e fatto $p=-161$; $q=-628$ si avrà

$$x=\frac{161\pm\sqrt{(25921-25192)}}{2}=\frac{161\pm\sqrt{729}}{2}=\frac{161\pm 27}{2}$$

Conclusione

Dunque, preso il segno superiore, sarà . . . $x=\frac{161+27}{2}=\frac{188}{2}=94$

E preso l'inferiore . . . . . $x=\frac{161-27}{2}=\frac{134}{2}=67$

Conseguentemente il giuocatore può aver perduto lir. 94, o lir. 67, ambedue le soluzioni soddisfacendo alle condizioni del problema.

Verificazione

1.° Caso. Se ha perduto lir. 94 le rimastegli saranno $160-94$, ossia 66. Moltiplicando 66 per 94 abbiamo 6204. Se dal guadagno di lir. 6298 si levano le perdute lir. 94 si ha realmente 6204.

2.° Caso. Se ha perduto lir. 67 le rimastegli saranno lir. $160-67$, ossia 93. Moltiplicando 93 per 67 abbiamo 6231. Se dal guadagno di lir. 6298 si levano le perdute lir. 67 si ha realmente 6231.

Problema LXXX.

Un mercante comperò un cavallo, che vendette dopo qualche tempo per 24 zecchini. In questa vendita egli perdette tanto per $\frac{0}{0}$, quanto il cavallo eragli costato. Si cerca il prezzo del cavallo sborsato dal mercante.

Raziocinio per l'Equazione

Supponiamo x il prezzo del cavallo. Se per condizione del problema 100 riducesi a $100-x$ nella rivendita, si troverà a quale quantità dovrà ridursi la x instituendo la proporzione

$$100 : 100-x :: x : 4^{to} = x\left(\frac{100-x}{100}\right)$$

Ma questa quantità debb'essere uguale a zecchini 24. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$x\left(\frac{100-x}{100}\right) = 24$$

Soluzione

1.° Si eseguisca la moltiplica accennata nel 1.° membro. 2.° Si moltiplichi per 100. 3.° Cambiati i segni all'equazione si ordini per x^2, e sarà

$$x^2 - 100x = -2400$$

4.° Sciolta come il problema 79.° si otterrà $x = 50 \pm 10$

Conclusione

Dunque, preso il segno superiore, sarà $x = 60$, e il mercante avrà pagato il cavallo zecchini 60; preso l'inferiore, sarà $x = 40$, e il mercante potrà averlo pagato zecchini 40. Ambedue le soluzioni soddisfanno al problema.

Verificazione

Nel 1.° caso infatti vendendo il cavallo per zecchini 24 perde zecchini 36, e perde precisamente il 60 per $\frac{0}{0}$, verificandosi la proporzione $100 : 40 :: 60 : 4.^{to} = \frac{40 \cdot 60}{100} = \frac{2400}{100} = 24$.

Nel 2.° caso perde zecchini 16, e perde il 36 per $\frac{0}{0}$, verificandosi la proporzione $100 : 60 :: 40 : 4.^{to} = \frac{60 \cdot 40}{100} = \frac{2400}{100} = 24$.

Problema LXXXI.

S'impiegano due operaj, che guadagnano salarj diversi. Il 1.° essendo stato pagato al termine di un dato numero di giorni ricevette lir. a, e il 2.°, che travagliò giorni q di meno ricevette lir. φ. S'egli avesse lavorato tutti i giorni come il 1.°, e il 1.° avesse lavorato giorni q di meno, avrebbero ambedue ricevuto la stessa somma. Quanti giorni ciascuno ha travagliato, e quanto ha guadagnato al giorno.

Raziocinio per le Equazioni

Sia x il numero de' giorni di travaglio del 1.°; quelli del 2.° saranno $x - q$. Il 1.° avrà ricevuto al giorno $\frac{a}{x}$, ed il 2.° $\frac{\varphi}{x-q}$. Se quest' ultimo avesse lavorato giorni x, il suo guadagno sarebbe stato $x\left(\frac{\varphi}{x-q}\right)$, e se il 1.° avesse lavorato q giorni di meno, il suo guadagno sarebbe stato $\frac{a}{x}(x-q)$. Ma in questo caso i due guadagni riescono eguali. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{\varphi x}{x-q} = \frac{a}{x}(x-q)$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per $x-q$, e per x. 2.° Si sottragga φx^2, ed aq^2. 3.° Si ordini per x^2, e si ponga questa quantità sotto i suoi fattori. 4.° Si divida per $a-\varphi$. 5.° Si compisca il quadrato. 6.° Si estragga la radice. 7.° Si aggiunga $\frac{aq}{a-\varphi}$. 8.° Si riduca il 2.° membro allo stesso denominatore, e sarà

$$x=\frac{aq\pm\sqrt{(a\varphi q^2)}}{a-\varphi}$$

Conclusione

Dunque il 1.° operajo avrà lavorato giorni $\frac{aq\pm\sqrt{(a\varphi q^2)}}{a-\varphi}$, ed il 2.° giorni $\frac{aq\pm\sqrt{(a\varphi q^2)}}{a-\varphi}-q=\frac{aq\pm\sqrt{(a\varphi q^2)}-aq+\varphi q}{a-\varphi}=\frac{\varphi q\pm\sqrt{(a\varphi q^2)}}{a-\varphi}$

Il guadagno del 1.° sarà al giorno lir. $\frac{a}{\frac{aq\pm\sqrt{(a\varphi q^2)}}{a-\varphi}}$, ossia $a\left(\frac{a-\varphi}{aq\pm\sqrt{(a\varphi q^2)}}\right)$

Ed il guadagno del 2.° sarà al giorno lir. $\frac{\varphi}{\frac{\varphi q\pm\sqrt{(a\varphi q^2)}}{a-\varphi}}$, ossia $\varphi\left(\frac{a-\varphi}{\varphi q\pm\sqrt{(a\varphi q^2)}}\right)$

Verificazione

Verifichiamo se il guadagno del 1.° dà precisamente lir. a, come debb' essere per condizione del problema. L' espressione del numero dei giorni di travaglio del 1.° moltiplicata pel guadagno di ciascun giorno dovrà darci il totale guadagno. Ed è infatti

$$\left\{\frac{aq\pm\sqrt{(a\varphi q^2)}}{a-\varphi}\right\}\left\{\frac{a(a-\varphi)}{aq\pm\sqrt{(a\varphi q^2)}}\right\}=a$$

elidendosi per la contrarietà delle accennate operazioni di moltiplica, e di divisione tutti gli altri fattori, eccettuato a.

Similmente si verificherebbero, e colla stessa facilità le altre condizioni.

Applicazione

Suppongasi, che il guadagno totale del 1.° fosse di lir. 96, e che il 2.° travagliasse giorni 6 di meno del 1.° e ricevesse in tutto lir. 54.

Ritenuta la condizione, che le somme ricevute sarebbero state eguali, se il 2.° avesse lavorato per tutti i giorni, pe' quali ha lavorato il 1.°, e se il 1.° avesse travagliato per giorni 6 di meno; avrassi

$$p = 54 \; ; \; q = 6 \; ; \; a = 96$$

Dunque $x = \frac{96 . 6 \pm \sqrt{(96 . 54 . 36)}}{96 - 54} = \frac{576 \pm \sqrt{186624}}{42} = \frac{576 \pm 432}{42}$

Conclusione

Dunque, preso il segno superiore, che solo può soddisfare alle condizioni del problema, si avrà $x = \frac{1008}{42} = 24$

Dunque il 1.° avrà lavorato per giorni 24, ed il 2.° per giorni 18. Il 1.° avrà guadagnato al giorno lir. $\frac{96}{24} = 4$, ed il 2.° lir. $\frac{54}{18} = 3$

Verificazione

Se il 2.° avesse lavorato tutti i giorni, pe' quali ha lavorato il 1.° il suo guadagno, ricevendo lir. 3 al giorno, sarebbe stato di lir. $3 \times 24 = 72$.

Se il 1.° avesse travagliato 6 giorni di meno, il suo guadagno, ricevendo lir. 4 al giorno, sarebbe stato di lir. $4 \times 18 = 72$. Come dovevasi verificare.

Problema LXXXII.

Si rimettono ad un banchiere due cambiali sulla medesima persona. La 1.ª è di lir. 550 pagabile entro 7 mesi; la 2.ª di lir. 720 pagabile entro 4 mesi. Egli ricevette per ambedue una somma di lir. 1200 esitandole in corso. Si domanda l'annuo interesse, che portavano le due cambiali.

Raziocinio per l'Equazione

Per evitare le frazioni nell'espressione degl'interessi per 7, e per 4 mesi si rappresenti con $12x$ l'interesse, che annualmente producono lir. 100, e allora l'interesse di un mese sarà x. Ciò posto il valore della 1.ª cambiale otterrassi evidentemente dalla proporzione

$$100 + 7x : 100 :: 550 : 4^{to} = \frac{55000}{100 + 7x}$$

Ed il valore della 2.ª si avrà parimenti da quest' altra proporzione

$$100 + 4x : 100 :: 720 : 4.^{to} = \frac{72000}{100 + 4x}$$

Ma queste due quantità debbono eguagliare la somma di lir. 1200. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{55000}{100 + 7x} + \frac{72000}{100 + 4x} = 1200$$

Soluzione

1.° Si divida per 200, e l'equazione diventerà

$$\frac{275}{100 + 7x} + \frac{360}{100 + 4x} = 6 \qquad (A)$$

2.° Si moltiplichi per $(100 + 7x)(100 + 4x)$. 3.° Sommati i termini riducibili si divida per 84. 4.° Sciolta quindi l'equazione, che ne sorte col solito metodo sarà

$$x = \frac{-745 \pm \sqrt{702025}}{84} = \frac{-745 \pm 837,869}{84}$$

Conclusione

Dunque, preso il segno superiore, che solo può soddisfare alle condizioni del problema, l'interesse d'un mese sarà

$$x = \frac{-745 + 837,869}{84} = \frac{92,869}{84}$$

e l'interesse annuo, che portavano le due cambiali, sarà

$$12x = 12 \times \frac{92,869}{84} = \frac{92,869 \times 12}{7 \times 12} = \frac{92,869}{7} = 13,267$$

Verificazione

Per verificare il problema vediamo se ad x sostituito il valor qui trovato l'equazione (A) diventa identica. Noi avremo pel 1.° membro

$$\frac{275}{100 + \frac{7 \cdot 92,869}{84}} + \frac{360}{100 + \frac{4 \cdot 92,869}{84}} = \frac{275 \cdot 84}{8400 + 650,083} + \frac{360 \cdot 84}{8400 + 371,476} = 5,998$$

Ma il 2.° membro è 6. Abbiamo pertanto la picciolissima differenza di meno di due millesimi, la quale è dovuta alla natura del calcolo decimale, non avendo nel valore preso per x portata l'esattezza oltre i millesimi, e qualche cosa essendosi sempre trascurato nelle successive divisioni.

Problema LXXXIII.

Alcuni negozianti stabiliscono un fondo di società affidato ad un agente. Ciascuno di essi contribuisce al fondo tante decine di scudi, quanti sono i socj. Il profitto dell'agente è due volte tanti scudi per 100, quanti sono i socj, e se si moltiplica la centesima parte del suo guadagno per $2\frac{2}{9}$ si trova il numero de' socj. Cercasi questo numero.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero de' socj. Ciascuno fornisce al negozio scudi $10x$, onde il fondo totale sarà $10x.x$, ossia $10x^2$. L'agente guadagna $2x$ per 100, e quindi sopra il capitale $10x^2$ guadagnerà $\frac{10x^2.2x}{100}=\frac{20x^3}{100}=\frac{x^3}{5}$ La centesima parte di questo guadagno sarà $\frac{x^3}{500}$. Ma questa quantità moltiplicata per $2\frac{2}{9}$, ossia per $\frac{20}{9}$ debb' essere uguale al numero de' socj. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{x^3}{500}\times\frac{20}{9}=x$$

Soluzione

1.° Si divida per x. 2.° Si eseguisca l'accennata moltiplica nel 1.° membro. 3.° Si divida il rotto, che n'emerge per 20. 4.° Si moltiplichi per 225. 5.° Si estragga la radice, e sarà

$$x=\pm\sqrt{225}=\pm 15$$

Conclusione

Dunque, preso il segno superiore, che solo corrisponde alla natura del problema, il numero de' socj sarà 15

Verificazione

Ciascuno contribuisce tante decine di scudi, quanti sono i socj. Dunque scudi 150. Dunque il fondo totale sarà di scudi 150 . 15, ossia 2250. L' agente guadagnando il 30 per 100 guadagnerà scudi $\frac{30 . 2250}{100} = \frac{67500}{100} = 675$. La centesima parte di questo guadagno moltiplicata per $\frac{20}{9}$ dee far 15. Ed è infatti

$$\frac{675}{100} \times \frac{20}{9} = \frac{13500}{900} = \frac{135}{9} = 15$$

Problema LXXXIV.

Due mercanti stabiliscono una società con un fondo di zecchini 100. Uno di essi lascia il suo denaro nel negozio per 3 mesi, e l'altro per 2, e ritira ciascuno 99 zecchini, compreso il capitale, ed il guadagno. Quanto ha contribuito ciascuno.

Raziocinio per l'Equazione

Il 1.° abbia contribuito zecchini x. Il 2.° avrà contribuito zecchini $100-x$. Se il 1.° ritira 99 zecchini il suo guadagno sarà $99-x$, acquistato in 3 mesi col capitale x; il guadagno del 2.° sarà $99-100+x$, ossia $x-1$, acquistato in 2 mesi col capitale $100-x$. In un mese questo 2.° avrebbe guadagnato $\frac{x-1}{2}$; onde in 3 mesi il suo guadagno sarebbe stato $3\left(\frac{x-1}{2}\right)$. Ciò posto: essendo i guadagni acquistati nel medesimo tempo in proporzione de' capitali, noi avremo l'analogia

$$x : 99-x :: 100-x : 3\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj avrassi la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{3x^2-3x}{2} = 9900-199x+x^2$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per 2. 2.° Si sottragga $2x^2$, e si aggiunga $398x$.

3.° Si sciolga quindi il problema col solito metodo, e si avrà

$$x = \frac{-395 \pm \sqrt{(156025 + 79200)}}{2} = \frac{-395 \pm \sqrt{235225}}{2} = \frac{-395 \pm 485}{2}$$

Conclusione

Dunque, preso il segno superiore soltanto, non corrispondendo alle condizioni del problema l'inferiore, sarà $x = \frac{-395 + 485}{2} = \frac{90}{2} = 45$. Conseguentemente il 1.° negoziante avrà contribuito al negozio zecchini 45, ed il 2.° 100 — 45, ossia 55

Verificazione

Le due somme debbono equivalere a zecchini 100. Ed è infatti $45 + 55 = 100$

Il guadagno del 1.° per mesi 3 sarà di zecchini $99 - 45 = 54$, e per un mese 18

Il guadagno del 2.° per mesi 2 sarà di zecchini $45 - 1 = 44$, e per un mese 22

Questi guadagni sono proporzionali ai capitali, perchè nell' analogia $43 : 18 :: 55 : 22$ si verifica il prodotto degli estremi eguale a quello de' medj.

Problema LXXXV.

Dividere il 10 in due parti tali, che il loro prodotto dia 100

Raziocinio per l'Equazione

È chiara l'impossibilità di questa divisione: noi la vedremo dimostrata dal calcolo, che ci conduce ad una espressione immaginaria. Facciamo $a = 10$, $b = 100$, e sia x una delle due chieste parti; l'altra sarà $a - x$. Ma il loro prodotto debb' essere uguale alla quantità b. Dunque avremo la seguente

Equazione del Problema

$$x(a - x) = b$$

Soluzione

1.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 2.° Si cangino i segni all'equazione, e si ordini per x^2. 3.° Si sciolga l'equazione al solito, e si avrà

$$x = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$$

Conclusione

Dunque sostituiti i valori del nostro problema una delle due parti ricercate sarà

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(100 - 400)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-300}}{2} = 5 \pm \sqrt{-75}$$

Ma la radice quadrata d'una quantità negativa è immaginaria. Dunque è impossibile dividere il 10 in due parti tali, che tra loro moltiplicate facciano 100. L'Algebra pertanto risolve tutte le questioni, che le si propongono: ne dà la soluzione, se vi può essere, e se non vi può essere ne dimostra l'impossibilità.

Problema LXXXVI.

Trovare un numero, il cui quadrato sia eguale al medesimo numero prima diminuito di tre unità, e poi preso tre volte.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero cercato. Il di lui quadrato dovendo eguagliare il triplo di $x - 3$, avrassi la seguente

Equazione del Problema

$$x^2 = 3(x - 3)$$

Soluzione

1.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 2.° Si sottragga $3x$. 3.° Sciolta l'equazione secondo il solito, riescirà

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-27}}{2}$$

Conclusione

Questo valore è immaginario. Dunque è impossibile la soluzione del problema; la quale impossibilità dà luogo al teorema, che non esiste alcun numero, il cui quadrato eguagli il triplo della differenza, che passa tra esso numero, ed il tre.

Problema LXXXVII.

Sono dati due lumi d'intensità diversa, distanti tra loro di un intervallo a. Cercasi a quale distanza dell'uno, e dell'altro illumineranno egualmente.

Raziocinio per l'Equazione

Chiamisi b l'intensità di un lume, c quella dell'altro. Sia x la distanza del punto, che si cerca, dal lume b, al qual punto il chiarore d'ambedue i lumi è uguale. La distanza d'esso punto dall'altro lume c sarà tutto l'intervallo a, meno la distanza x, cioè $a-x$. Ora: la soluzione di questo problema esige la cognizione di Fisica sperimentale, che lo splendore generato dal medesimo lume è nella ragione reciproca duplicata delle distanze, ed in lumi diversi è nella ragion composta della diretta di loro intensità, e dell'inversa duplicata delle loro distanze; ossia, ch'è poi lo stesso, che l'intensità dei lumi è nella ragion reciproca dei quadrati delle distanze. L'intensità adunque del 1.° lume sarà $\frac{b}{x^2}$, e quella del 2.° $\frac{c}{(a-x)^2}$. Ma per condizione del problema queste due intensità debbono essere uguali. Dunque avremo la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{b}{x^2}=\frac{c}{(a-x)^2}$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per $x^2(a^2-2ax+x^2)$. 2.° Si sottragga cx^2, e

ba^2. 3.° Si sciolga la x^2 ne' suoi fattori. 4.° Si divida per $b-c$. 5.° Sciolta quindi l'equazione col metodo solito si otterrà

$$x = \frac{ab \pm \sqrt{bca^2}}{b-c} = \frac{ab \pm a\sqrt{bc}}{b-c}$$

Conclusione

La distanza del punto richiesto dal lume b verrà dunque rappresentata dalla formola $\frac{ab \pm a\sqrt{bc}}{b-c}$, e quella dello stesso punto dal lume c sarà $a - \left(\frac{ab \pm a\sqrt{bc}}{b-c}\right)$, ossia $\frac{-ac \mp a\sqrt{bc}}{b-c}$

Verificazione

Prendasi il segno superiore, e sostituito ad x il valore qui trovato veggiamo, se si verifica nell'equazione del problema, che le due intensità sieno tra loro eguali.

Avremo $\frac{b}{x^2} = \frac{b}{\frac{a^2b^2 + 2ba^2\sqrt{bc} + bca^2}{b^2 - 2bc + c^2}} = \frac{b(b^2 - 2bc + c^2)}{a^2b^2 + 2ba^2\sqrt{bc} + bca^2}$

E $\frac{c}{(a-x)^2} = \frac{c}{\left(\frac{-ac - a\sqrt{bc}}{b-c}\right)^2} = \frac{c}{\frac{a^2c^2 + 2ca^2\sqrt{bc} + bca^2}{b^2 - 2bc + c^2}} = \frac{c(b^2 - 2bc + c^2)}{a^2c^2 + 2ca^2\sqrt{bc} + bca^2}$

Se divideremo tutti i termini della 1.ª quantità per b, e tutti i termini della 2.ª per c avremo per ambedue le intensità l'espressione $\frac{b^2 - 2bc + c^2}{ca^2 + 2a^2\sqrt{bc} + ba^2}$ come doveasi trovare.

Applicazione

Supponiamo, che i due lumi sieno distanti fra loro di 6 metri, e sia l'intensità del 1.° a quella del 2.° :: 4 : 1. Avremo

$$a = 6\,;\ b = 4\,;\ c = 1$$

Dunque, preso il segno positivo, sarà $x = \frac{24 + 6\sqrt{4}}{4-1} = \frac{24+12}{3} = \frac{36}{3} = 12$

Preso il negativo sarà . . . . . $x = \frac{24 - 6\sqrt{4}}{4-1} = \frac{24-12}{3} = \frac{12}{3} = 4$

Conclusione

Dunque i due lumi della data intensità potranno illuminare egualmente, posti alla distanza 12, ed alla distanza 4

Verificazione

Prendasi $x = 4$. L'intensità del 1.° lume sarà $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Quella del 2.° sarà $\frac{1}{(6-4)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Queste intensità sono eguali; ed i due lumi illumineranno egualmente, posti alla distanza di 4 metri.

Prendasi $x = 12$. L'intensità del 1.° lume sarà $\frac{4}{144} = \frac{1}{36}$

Quella del 2.° sarà $\frac{1}{(6-12)^2} = \frac{1}{-6^2} = \frac{1}{36}$

Queste intensità sono eguali ancora, ed i due lumi illumineranno pure egualmente, posti alla distanza di 12 metri.

Descritta quindi la linea FF' (Fig. 77.ª Tav. 5.ª) se l'oggetto, che debb'essere illuminato sarà tra mezzo ai lumi, verrà egualmente illuminato, ove si ponga alla distanza di 4 metri; se l'oggetto sarà al di fuori, lo sarà alla distanza di 12, ritenute le supposte diverse intensità.

Problema LXXXVIII.

Lasciato cadere un sasso entro un pozzo si trovò essere scorsi undici minuti secondi, e mezzo tra il momento, in cui il sasso si è lasciato cadere, e quello, in cui si udì il tonfo. Cercasi con questo dato la profondità del pozzo.

Raziocinio per l'Equazione

La soluzione di questo problema esige le cognizioni di Fisica generale, e particolare, che noi qui accenneremo. Si sa per la 1.ª, che i gravi liberamente cadenti percorrono degli spazj in ragione de' quadrati dei tempi, e che un grave lasciato libero a se stesso percorre nel primo minuto secondo piedi 15 circa. Si sa per la 2.ª, che il suono diramasi con

moto equabile, e che in un secondo percorre 1040 piedi in circa. Ciò premesso veniamo alla soluzione del problema. Facciasi $a = 15$, spazio percorso dal sasso in un secondo minuto; $b = 1040$, spazio per cui nello stesso tempo diramasi il suono; $c = 11\frac{1}{2}$ minuti secondi, tempo scorso tra il momento, in cui il sasso si è lasciato cadere, e quello, in cui udissi il tonfo. Questo tempo debb' essere diviso in due parti, l'una delle quali si chiamerà T, e si assegnerà alla caduta del sasso; l'altra t, e si assegnerà al diffondersi del suono. Finalmente chiamisi x l'altezza del pozzo, di cui si cerca. Appoggiati agli esposti due teoremi potremo instituire le seguenti proporzioni; come stanno piedi a a piedi x, così starà un minuto secondo al quadrato del tempo T, e come stanno piedi b a piedi x, così starà un minuto secondo al tempo t; cioè

$$1.^a \quad a : x :: 1 : T^2$$
$$2.^a \quad b : x :: 1 : t$$

Fatto nella 1.ª il prodotto degli estremi, e de' medj si avrà $aT^2 = x$, e quindi $T = \pm\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)}$. Fattolo nella 2.ª sarà $bt = x$, e quindi $t = \frac{x}{b}$. Ma c rappresenta la somma di questi due tempi. Dunque, preso il segno superiore nell' espressione del tempo T, si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)} + \frac{x}{b} = c$$

Soluzione

1.° Si quadri l'equazione. 2.° Si moltiplichi per ab^2. 3.° Si sottragga b^2x, ed ab^2c^2. 4.° Ordinata l'equazione per x^2 si divida per a, e si sciolga la x ne' suoi fattori. 5.° Sciolta quindi al solito l'equazione, che ne risulta, si avrà

$$x = bc + \frac{b^2}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{4ab^3c + b^4}{4a^2}\right)} = \frac{2abc + b^2 \pm b\sqrt{(4abc + b^2)}}{2a} \qquad (B)$$

Conclusione

Dunque l'altezza del pozzo sarà rappresentata dalla formola (B).

Verificazione

Verificheremo la soluzione nel caso particolare determinato dal nostro problema.

Applicazione

Riduciamo le generali espressioni all'applicazione determinata dal problema, e per maggiore brevità di calcolo, ritenuto $c = 11\frac{1}{2}$, ed $a = 15$, si assuma $b = 1000$. Noi otterremo così l'altezza del pozzo cercata non esattamente, ma solo prossimamente: la differenza però dai veri valori non essendo tanto grande, non ci potrà portare in pratica ad un errore molto sensibile. Ciò posto avremo

$$b^2 = 1000000\,;\ ab = 15000\,;\ abc = 15000 \,.\, 11\frac{1}{2} = 172500$$

$$2abc = 345000\,;\ 4abc = 690000\,;\ 2a = 30$$

Sostituite queste quantità nella formola (B) trovata per x si otterrà

$$x = \frac{345000 + 1000000 \pm 1000\sqrt{(690000 + 1000000)}}{30} = \frac{1345000 \pm 1000\sqrt{1690000}}{30} =$$

$$\frac{1345000 \pm 1000 \,.\, 1300}{30} = \frac{1345000 \pm 1300000}{30}$$

Conclusione

Dunque, preso il segno superiore, si avrà $x = \frac{2645000}{30} = 88166\frac{2}{3}$

Preso l'inferiore . . . . . $x = \frac{45000}{30} = 1500$

Questi due valori soddisfanno all'equazione; ma non al problema. L'ambiguità de' valori nasce dall'ambiguità del radicale del primo termine nell'equazione primitiva; poichè è chiaro, altro essere il valore della x, quando il 1.° termine prendasi positivo, ed altro, quando si faccia negativo; cioè maggiore nel 2.° caso, e minore nel 1.° Ma nell'ipotesi del nostro problema la quantità $\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)}$ è il valore del tempo impiegato dal sasso a cadere, cioè un valore positivo di sua natura. Dunque il valore corrispondente al problema sarà il minore dei due, che abbiamo trovato. Dunque l'altezza del pozzo sarà prossimamente di piedi 1500.

Verificazione

Una prova della soluzione si ha nel cercare i valori dei tempi dati per x, tanto nell' espressione, in cui entra a, quanto nell' altra, in cui entra b. Noi avevamo $T = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)}$. Dunque sarà pel caso particolare $T = \sqrt{\left(\frac{1500}{15}\right)} = \sqrt{100} = 10$. Avevamo pure $t = \frac{x}{b}$. Dunque $t = \frac{1500}{1000} = 1\frac{1}{2}$. Ma questi due tempi sommati insieme debbono far c, che si è supposto $11\frac{1}{2}$; ed è realmente $10 + 1\frac{1}{2} = 11\frac{1}{2}$. Dunque la soluzione è esatta.

Problema LXXXIX.

Un numero a d'uomini, e di donne per dare una festa da ballo hanno speso una somma $3b$. Ciascuna donna ha speso m meno di ciascun uomo, e tutti gli uomini insieme hanno speso il doppio di tutte le donne. Cercasi il numero degli uomini, e delle donne, e la spesa di ciascuno.

Raziocinio per le Equazioni

Chiamato x il numero degli uomini, quello delle donne sarà $a - x$; e chiamata y la spesa di ciascun uomo, sarà $y - m$ quella di ciascuna donna. La spesa totale $3b$ dovrassi ripartire in due per tale maniera, che tocchi il doppio agli uomini, onde il loro importo totale sarà $2b$, e quello delle donne b. Ma questi due importi sono rappresentati il 1.° da $x.y$, ed il 2.° da $(a - x)(y - m)$. Dunque avremo le seguenti

Equazioni del Problema

1.ª $\quad xy = 2b$

2.ª $\quad (a - x)(y - m) = b$

Soluzione

1.° Si divida la 1.ª per x. 2.° Si sostituisca il valore, che ne sorte per y nella 2.ª 3.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 4.° Si moltiplichi per x. 5.° Si sottragga bx, e $2ab$. 6.° Si sciolga la x ne' suoi fattori, e si ordini l' equazione per x^2. 7.° Si divida per m. 8.° Sciolta l' equazione secondo il solito, si otterrà

$$x = \frac{3b + am \pm \sqrt{(9b^2 - 2abm + a^2m^2)}}{2m} \qquad (A)$$

9.° Posto questo valore nella espressione $y = \frac{2b}{x}$, che si ha per la 1.ª di queste operazioni, avrassi finalmente

$$y = \frac{2b}{\frac{3b + am \pm \sqrt{(9b^2 - 2abm + a^2m^2)}}{2m}} = \frac{4bm}{3b + am \pm \sqrt{(9b^2 - 2abm + a^2m^2)}} \quad (B)$$

Conclusione

Dunque il numero degli uomini verrà rappresentato dalla formola (A), e la formola (B) rappresenterà la spesa di ciascun uomo. Se dalla quantità cognita a leveremo il valore trovato per x, avremo il numero delle donne, e se dal valore trovato per y toglieremo l'altra quantità cognita m, avremo la spesa di ciascuna donna.

Verificazione

1.° Proviamo a verificare, che la spesa totale degli uomini è $2b$. Questa spesa emerge dalla x moltiplicata nella y, onde prese le due formole (A), e (B), avremo

$$\left(\frac{3b + am \pm \sqrt{(9b^2 - 2abm + a^2m^2)}}{2m}\right)\left(\frac{4bm}{3b + am \pm \sqrt{(9b^2 - 2abm + a^2m^2)}}\right) = \frac{4bm}{2m} = 2b$$

2.° Egualmente si troverebbe essere b la spesa di tutte le donne.

Applicazione

Sieno 45 i socj per la festa. Ciascuna donna paghi due scudi meno di ciascun uomo, e la spesa totale ascenda a scudi 324. Sarà

$$a = 45 \; ; \; m = 2 \; ; \; 3b = 324 \; ; \text{ e quindi } b = 108$$

Dunque $x = \frac{324 + 90 \pm \sqrt{(104976 - 19440 + 8100)}}{4} = \frac{414 \pm \sqrt{93636}}{4} = \frac{414 \pm 306}{4}$

Conclusione

Dunque, preso il segno superiore sarà . . $x = \frac{414 + 306}{4} = \frac{720}{4} = 180$

E preso l'inferiore . . . . . $x = \frac{414 - 306}{4} = \frac{108}{4} = 27$

Dunque il numero degli uomini potrebbe essere 180, e 27. Ma la 1.ª

soluzione, quantunque soddisfaccia all' equazione, non vale pel problema, perchè darebbe un numero maggiore del dato numero totale de' socj. Dunque gli uomini saranno stati 27. Conseguentemente le donne saranno state $45-27$, ossia 18. Ma abbiamo $y=\frac{2b}{x}=\frac{216}{27}=8$. Dunque la spesa di ciascun uomo sarà stata di scudi 8; e quella di ciascuna donna $y-m=8-2=6$.

Verificazione

1.° Uomini	27	2.° N.° 27 a scudi 8. . .	Sc. 216
Donne.	18	N.° 18 a scudi 6. . .	» 108
Totale de' socj . . .	45	Totale della spesa . . .	Sc. 324

Problema XC.

Cercansi due numeri p, q, de' quali è data la somma n, ed il triplo della radice cubica del loro prodotto m.

Raziocinio per le Equazioni

Eseguite le due condizioni del problema si hanno le seguenti

Equazioni del Problema

$$1.^a\ p+q=n$$
$$2.^a\ 3\sqrt[3]{pq}=m$$

Soluzione

1.° Si cubi la 2.ª 2.° Si divida per 27, e si moltiplichi poscia per 4, e si otterrà

$$4pq=\frac{4m^3}{27}$$

3.° Si quadri la 2.ª 4.° Si sottragga $4pq$ al 1.° membro, e il suo valore corrispondente al 2.° 5.° Si estragga la radice, e si avrà

$$p-q=\pm\sqrt{\left(n^2-\frac{4m^3}{27}\right)} \qquad (\mu)$$

6.° In questa equazione si aggiunga q, ossia $n-p$, ch' è il valore di q

tratto dalla 1.ª equazione del problema. 7.° Si aggiunga p, quindi si divida per 2, e si otterrà

$$p=\frac{1}{2}\left(n\pm\sqrt{\left(n^2-\frac{4m^3}{27}\right)}\right)=\frac{n}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}$$

8.° Si sottragga in (μ) la quantità radicale. 9.° Si aggiunga q. 10.° A p si sostituisca il valore $n-q$ tratto dalla 1.ª equazione del problema. 11.° Si aggiunga di nuovo q, e si ordini per q. 12.° Si divida per 2, e sarà

$$q=\frac{1}{2}\left(n\mp\sqrt{\left(n^2-\frac{4m^3}{27}\right)}\right)=\frac{n}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}$$

Conclusione

Dunque dei due numeri cercati il 1.° sarà $\frac{n}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}$

Ed il 2.° . . . . . $\frac{n}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}$

Verificazione

1.° La somma dei due numeri debb' essere n. Sommando infatti le due formole trovate per p, e per q le quantità affette dal radicale svaniscono per la contrarietà de' segni, onde resta $p+q=\frac{2n}{2}=n$

2.° Colla medesima facilità si verificherebbe, che il triplo della radice cubica del loro prodotto dà m.

Applicazione

La somma dei due numeri sia 12, e il triplo della radice cubica del loro prodotto sia 9. Avrassi

$$n=12\,;\ m=9$$

Dunque $p=\frac{12}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{144}{4}-\frac{9\cdot9\cdot9}{3.9}\right)}=6\pm\sqrt{\left(36-\frac{9\cdot9}{3}\right)}=6\pm\sqrt{(36-27)}=6\pm\sqrt{9}=6\pm3$

E conseguentemente $q=6\mp3$

Conclusione

Dunque preso il segno superiore sarà . . . . . $p=9\,;\ q=3$

E preso l' inferiore. . . . . $p=3\,;\ q=9$

Verificazione

1.° In ambedue i casi la somma è $9+3=12$
2.° In ambedue i casi il prodotto de' numeri è 27. La radice cubica di 27 è 3. Il triplo di 3 è 9, come debb' essere per condizione del problema.

Problema XCI.

Trovare due quantità, la cui somma sia eguale alla differenza dei loro quadrati, e dei loro cubi.

Raziocinio per le Equazioni

Sieno x, ed y le due quantità. Eseguendo le condizioni accennate nel problema con un semplicissimo raziocinio si otterranno le seguenti

Equazioni del Problema

$$1.^a\ x+y=x^2-y^2$$
$$2.^a\ x+y=x^3-y^3$$

Soluzione

1.° Si decomponga il 2.° membro in ambedue le equazioni, e diventeranno

$$x+y=(x+y)(x-y) \qquad (\varphi)$$
$$x+y=(x-y)(x^2+xy+y^2) \qquad (\varphi')$$

2.° Si divida (φ) per $x+y$ . . . . . $x-y=1$ (π)
3.° Si sostituisca (π) in (φ') . . . . . $x+y=x^2+xy+y^2$ (π')
4.° In (π) si aggiunga y . . . . . $x=1+y$ (λ)
5.° Si sostituisca (λ) in (π'). . . . . $1+2y=3y^2+3y+1$
6.° Si sottragga $2y+1$, e si ordini per y^2 . . . . $3y^2+y=0$
7.° Si divida per 3, e quindi sciolta l'equazione col metodo solito si avrà

$$y=\frac{-1\pm 1}{6}$$

8.° Preso il segno superiore sarà $y=0$, e preso l'inferiore $y=-\frac{1}{3}$.
9.° Si sostituisca in (λ) il 1.° valore, e riescirà $x=1$; vi si sostituisca il 2.°; e sarà $x=\frac{2}{3}$.

Conclusione

La prima soluzione non soddisfacendo al problema, avremo per le due quantità cercate le due frazioni una positiva, e l'altra negativa, cioè $x=\frac{2}{3}$, ed $y=-\frac{1}{3}$

Verificazione

La somma delle due quantità è . . . . $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

La differenza de' quadrati è . . . . . $\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

La differenza de' cubi è . . . . . $\frac{8}{27}+\frac{1}{27}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

Problema XCII.

Vi sono due catene, le quali hanno queste particolarità, cioè, che se la 1.ª avesse tante volte più anelli, quanti ne ha la 2.ª, ne avrebbe 600, e se la 2.ª e la 1.ª avessero 10 volte più anelli di que', che hanno, ne avrebbero 500. Quanti anelli ha ciascuna.

Raziocinio per le Equazioni

Il problema è chiaramente lo stesso, che se si trattasse di trovare due numeri tali, che il loro prodotto sia 600, e la moltiplica della loro somma per 10 sia 500. Chiamato pertanto x il 1.° numero, ed y il 2.° si avranno le seguenti

Equazioni del Problema

1.ª $\quad xy=600$
2.ª $\quad (x+y)10=500$

Soluzione

1.° Si divida per 10 la 2.ª 2.° Vi si sottragga x, e si avrà

$$y = 50 - x \qquad (m)$$

3.° Si sostituisca (m) nella 1.ª 4.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 5.° Si cambino i segni all'equazione, e si ordini per x.ª 6.° Sciolta col solito metodo l'equazione, che ne risulta, avrassi

$$x = 25 \pm \sqrt{25} = 25 \pm 5$$

7.° Preso il segno superiore sarà $x = 30$, e preso l'inferiore $x = 20$ 8.° Sostituiti questi valori in (m) sarà $y = 50 - 30 = 20$, ed $y = 50 - 20 = 30$

Conclusione

Dunque la 1.ª catena aveva 30 anelli, e 20 aveane la 2.ª; oppure 20 la 1.ª, e 30 la 2.ª

Verificazione

1.° In ambedue i casi se la 1.ª avesse tanti anelli, quanti ne ha la 2.ª, avrebbe anelli 30×20, ossia 600, come dice il problema.

2.° Si sommino gli anelli delle due catene, e si avranno 50 anelli, e se queste due catene avessero 10 volte più anelli di que', che hanno, ne avrebbero 50×10, ossia 500, come debbono essere per condizione del problema.

Problema XCIII.

Cercansi quattro numeri in proporzione aritmetica, ne' quali il prodotto degli estremi sia m, ed n quello de' medj.

Raziocinio per le Equazioni

Sia u il 1.° numero, x il 2.°; z il 3.°, ed y il 4.° Instituite le proporzioni aritmetiche accennate nel problema, si avrà

$$u : x :: z : y \qquad u : x :: x : z$$

Fatta in ambedue la somma de' medj, e degli estremi si otterranno le seguenti

Equazioni del Problema

1.ª $u + y = x + z$

2.ª $u + z = 2x$

Ma il prodotto degli estremi debb' essere m, e quello de' medj n. Dunque si avranno le altre due

EQUAZIONI DEL PROBLEMA

3.ª $uy = m$

4.ª $xz = n$

SOLUZIONE

1.° Si sottragga y nella 1.ª . . . . . $u = x + z - y$ (φ)

2.° Si sottragga z nella 2.ª . . . . . $u = 2x - z$ (φ')

3.° Si sottragga (φ') da (φ) . . . . . $0 = 2z - x - y$

4.° Si aggiunga y, ... $y = 2z - x$ (φ'')

5.° Si divida per y la 3.ª equazione . . . . . $u = \frac{m}{y}$

6.° Si ponga questo valore in (φ') . . . . . $\frac{m}{y} = 2x - z$

7.° Sostituiscasi ad y il suo valore (φ'') . . . $\frac{m}{2z - x} = 2x - z$

8.° Si moltiplichi per $2z - x$ . . . . . $m = 4zx - 2z^2 - 2x^2 + xz$

9.° E riducendo. . . . . $m = 5zx - 2z^2 - 2x^2$ (π)

10.° Si divida per x la 4.ª equazione . . . . . $z = \frac{n}{x}$ (π')

11.° Si metta questo valore in (π) . . . . . $m = 5n - \frac{2n^2}{x^2} - 2x^2$

12.° Si moltiplichi per x^2. . . . . $mx^2 = 5nx^2 - 2n^2 - 2x^4$

13.° Si aggiunga $2x^4$, e si sottragga $5nx^2$ . . $2x^4 + x^2(m - 5n) = -2n^2$

14.° Si divida per 2 . . . . . $x^4 + x\left(\frac{m - 5n}{2}\right) = -n^2$

15.° Sciolta questa equazione col metodo solito compiendo il quadrato del 1.° membro, ed estraendone la radice quadrata, avrassi

$$x^2 = \frac{5n - m \pm \sqrt{(m^2 - 10mn + 9n^2)}}{4}$$

16.° Estratta di nuovo la radice quadrata si otterrà

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\left(5n - m \pm \sqrt{(m^2 - 10mn + 9n^2)}\right)} \qquad (A)$$

17.° Si ponga questo valore nella equazione (π'), e si avrà (B)

$$x = \frac{n}{\frac{1}{2}\sqrt{\left(5n - m \pm \sqrt{(m^2 - 10mn + 9n^2)}\right)}} = \frac{2n}{\sqrt{\left(5n - m \pm \sqrt{(m^2 - 10mn + 9n^2)}\right)}}$$

18.° Sostituiti i valori trovati nell' equazione (φ'') si avrà

$$y=\frac{4n}{\sqrt{(5n-m\pm\sqrt{(m^2-10mn+9n^2)})}}-\frac{\sqrt{(5n-m\pm\sqrt{(m^2-10mn+9n^2)})}}{2}$$

19.° Si riducano questi termini al comune denominatore, e sarà

$$y=\frac{8n-5n+m\mp\sqrt{(m^2-10mn+9n^2)}}{2\sqrt{(5n-m\pm\sqrt{(m^2-10mn+9n^2)})}}=\frac{3n+m\mp\sqrt{(m^2-10mn+9n^2)}}{2\sqrt{(5n-m\pm\sqrt{(m^2-10mn+9n^2)})}} \quad (C)$$

20.° Sostituiti questi valori nell' equazione (φ') si otterrà

$$u=\sqrt{(5n-m\pm\sqrt{(m^2-10mn+9n^2)})}-\frac{2n}{\sqrt{(5n-m\pm\sqrt{(m^2-10mn+9n^2)})}}$$

21.° E ridotti i termini allo stesso denominatore si avrà finalmente

$$u=\frac{5n-m\pm\sqrt{(m^2-10mn+9n^2)}-2n}{\sqrt{(5n-m\pm\sqrt{(m^2-10mn+9n^2)})}}=\frac{3n-m\pm\sqrt{(m^2-10mn+9n^2)}}{\sqrt{(5n-m\pm\sqrt{(m^2-10mn+9n^2)})}} \quad (D)$$

Conclusione

Dunque il 1.° numero ricercato sarà rappresentato dalla formola (D); il 2.° dalla formola (A); il 3.° dalla formola (B); ed il 4.° dalla formola (C).

Verificazione

Prendiamo a verificare una delle condizioni del problema, e sia quella, per cui il prodotto de' medj debb' essere n. I due medj essendo rappresentati dalle formole (A), e (B), avremo

$$\left\{\frac{\sqrt{(5n-m\pm\sqrt{(m^2-10mn+9n^2)})}}{2}\right\}\left\{\frac{2n}{\sqrt{(5n-m\pm\sqrt{(m^2-10mn+9n^2)})}}\right\}=\frac{2n}{2}=n$$

Come doveasi verificare

Collo stesso andamento si verificherebbero anche le altre condizioni.

Applicazione

Vogliansi quattro numeri in proporzione aritmetica, che facciano il prodotto de' medj eguale a 6, e quello degli estremi eguale a 4. Avremo

$$m=4\,;\,n=6$$

$$\text{Dunque } u=\frac{18-4\pm\sqrt{(16-240+324)}}{\sqrt{(30-4\pm\sqrt{(16-240+324)})}}=\frac{14\pm\sqrt{100}}{\sqrt{(26\pm\sqrt{100})}}=\frac{14\pm10}{\sqrt{(26\pm10)}}$$

Preso il segno superiore . . . . . $u = \frac{14 + 10}{\sqrt{(26 + 10)}} = \frac{24}{\sqrt{36}} = \frac{24}{6} = 4$

Preso il segno inferiore . . . . . $u = \frac{14 - 10}{\sqrt{(26 - 10)}} = \frac{4}{\sqrt{16}} = \frac{4}{4} = 1$

Ed $x = \frac{\sqrt{(30 - 4 \pm \sqrt{(16 - 240 + 324)})}}{2} = \frac{\sqrt{(26 \pm \sqrt{100})}}{2} = \frac{\sqrt{(26 \pm 10)}}{2}$

Preso il segno superiore . . . . . $x = \frac{\sqrt{(26 + 10)}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Preso il segno inferiore . . . . . $x = \frac{\sqrt{(26 - 10)}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

E $z = \frac{12}{\sqrt{(30 - 4 \pm \sqrt{(16 - 240 + 324)})}} = \frac{12}{\sqrt{(26 \pm \sqrt{100})}} = \frac{12}{\sqrt{(26 \pm 10)}}$

Preso il segno superiore . . . . . $z = \frac{12}{\sqrt{(26 + 10)}} = \frac{12}{\sqrt{36}} = \frac{12}{6} = 2$

Preso il segno inferiore . . . . . $z = \frac{12}{\sqrt{(26 - 10)}} = \frac{12}{\sqrt{16}} = \frac{12}{4} = 3$

Ed $y = \frac{18 + 4 \mp \sqrt{(16 - 240 + 324)}}{2\sqrt{(30 - 4 \pm \sqrt{(16 - 240 + 324)})}} = \frac{22 \mp \sqrt{100}}{2\sqrt{(26 \pm \sqrt{100})}} = \frac{22 \mp 10}{2\sqrt{(26 \pm 10)}}$

Preso il segno superiore . . . . . $y = \frac{22 - 10}{2\sqrt{(26 + 10)}} = \frac{12}{2\sqrt{36}} = \frac{12}{12} = 1$

Preso il segno inferiore . . . . . $y = \frac{22 + 10}{2\sqrt{(26 - 10)}} = \frac{32}{2\sqrt{16}} = \frac{32}{8} = 4$

Conclusione

Dunque i numeri cercati, prese ambedue le soluzioni, saranno

Nel 1.° Caso. . . . . Il 1.° 4 ; il 2.° 3 ; il 3.° 2 ; il 4.° 1

Nel 2.° Caso. . . . . Il 1.° 1 ; il 2.° 2 ; il 3.° 3 ; il 4.° 4

Verificazione

1.° In ambedue i casi i termini sono in proporzione aritmetica colla differenza uno, decrescente nel 1.° caso, e crescente nel 2.°

2.° In ambedue i casi poi il prodotto degli estremi è 4×1, ossia 4, e quello de' medj è 2×3, ossia 6, come si è supposto.

PROBLEMI DI TERZO GRADO

Problema XCIV.

Alcuni capitani d'esercito trovansi in guerra, ove ciascuno comanda ad un numero di cavalieri m volte maggiore, e ad un numero di fanti n volte maggiore di quello de' capitani. Ciascun cavaliere riceve per sua paga mensuale un numero di scudi, che corrisponde alla $q.^{esima}$ parte dei capitani, e ciascun fante riceve la $p.^{esima}$ parte de' cavalieri. Tutta la spesa mensuale ascende ogni mese a scudi a. Quanti sono i capitani.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero de' capitani. Ciascun capitano avrà sotto il suo comando mx cavalieri, ed nx fanti. Dunque il numero totale dei cavalieri sarà $mx.x$, ossia mx^2, e quello de' fanti $nx.x$, ossia nx^2. La paga de' cavalieri sarà $\frac{x}{q}$ per ciascuno, e in totale sarà $\frac{mx^3}{q}$. La paga de' fanti sarà $\frac{x}{pq}$ per ciascuno, e in totale $\frac{nx^3}{pq}$. Ma queste due quantità debbono formare una somma a. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{nx^3}{pq} + \frac{mx^3}{q} = a$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per pq. 2.° Si sciolga la x^3 ne' suoi fattori. 3.° Si divida per $n + mp$. 4.° Si estragga la radice cubica, e si avrà

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{apq}{n + mp}\right)}$$

Conclusione

Dunque il numero de' capitani sarà espresso dalla formola $\sqrt[3]{\left(\frac{apq}{n+mp}\right)}$

Verificazione

Faremo la verificazione di questa soluzione, applicando la formola ad un caso particolare.

Applicazione

Supponiamo, che ciascun capitano comandi ad un numero di cavalieri 3 volte maggiore, e ad un numero di fanti 20 volte maggiore di quello de' capitani. Ciascun cavaliere riceva per sua paga mensuale un numero di scudi, che corrisponda alla metà del numero de' capitani, e ciascun fante riceva la metà della paga de' cavalieri. Tutta la spesa mensuale ascenda a scudi 6500. Cercasi il numero de' capitani. Avremo

$$a = 6500\ ;\ m = 3\ ;\ n = 20\ ;\ p = 2\ ;\ q = 2$$

Dunque $x = \sqrt[3]{\left(\frac{6500 \,.\, 2 \,.\, 2}{20 + 3 \,.\, 2}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{26000}{26}\right)} = \sqrt[3]{1000} = 10$

Conclusione

Dunque i capitani d'esercito erano 10.

Verificazione

Il numero de' cavalieri sarà $3 \,.\, 10^2 = 3 \,.\, 100 = 300$. Quello de' fanti $20 \,.\, 10^2 = 20 \,.\, 100 = 2000$. Ciascun cavaliere riceve al mese scudi 5. Dunque i cavalieri importeranno al mese una somma di scudi $5 \,.\, 300 = 1500$. Ciascun fante riceve al mese scudi $2\frac{1}{2}$. Dunque i fanti importeranno al mese una somma di scudi $2000 \,.\, 2\frac{1}{2} = 5000$. E sommando i due importi si avranno scudi 6500 per la totalità della spesa, come si è supposto.

Problema XCV.

Alcuni negozianti formano un capitale sborsando ciascuno tante centinaja di lire, quanti sono gli associati. Il negozio guadagna per un dato tempo l'$n.^{plo}$ per $\frac{0}{0}$ quanti sono i socj, e frutta in tutto lir. a. Si cerca il numero degli associati, e quindi il guadagno di ciascuno.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero de' socj. Il capitale sborsato da ciascuno sarà $100x$, e il capitale intero $100x.x$, ossia $100x^2$. Il frutto sarà nx sopra lir. 100, ed essendosi chiamato a il guadagno totale fatto col capitale $100x^2$, avremo la proporzione

$$100 : nx :: 100x^2 : a$$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$100nx^3 = 100a$$

Soluzione

1.° Si divida per $100n$. 2.° Si estragga la radice cubica, e sarà

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{a}{n}\right)}$$

Conclusione

Dunque la formola esprimente il numero de' socj sarà $\sqrt[3]{\left(\frac{a}{n}\right)}$, dalla quale si ricaverà agevolmente il guadagno di ciascuno.

Verificazione

Si cubi il valore della x, ed avrassi $\frac{a}{n}$. Si moltiplichi questo cubo per $100n$, e si avrà $\frac{100an}{n} = 100a$, ch' è precisamente il 2.° membro della nostra equazione.

Applicazione

Supponiamo, che ciascun socio guadagni un numero di lire eguale al doppio de' socj per $\frac{0}{0}$, e che il guadagno totale sia di lir. 2662. Avremo

$$n = 2 \; ; \; a = 2662$$

Dunque $x = \sqrt[3]{\left(\frac{2662}{2}\right)} = \sqrt[3]{1331} = 11$

Conclusione

Dunque i socj erano 11, e il guadagno di ciascuno sarà stato di lir. 22 per $\frac{0}{0}$

Verificazione

Undici negozianti contribuiscono ciascuno lir. 1100, onde formano un capitale di lir. 12100, sul quale guadagnando ciascuno il 22 per $\frac{0}{0}$ ogni negoziante guadagnerà lir. 242. Questo numero moltiplicato per 11 dà precisamente lir. 2662, che è il guadagno totale del negozio.

Problema XCVI.

Trovare tre numeri in proporzione doppia, che moltiplicati fra loro facciano 64000.

Raziocinio per l' Equazione

Sia il 1.° numero x; il 2.° sarà $2x$; ed il 3.° $4x$. Ma il loro prodotto debb'essere 64000. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$8x^3 = 64000$$

Soluzione

1.° Si divida per 8. 2.° Si estragga la radice cubica, e sarà

$$x = \sqrt[3]{8000} = 20$$

Conclusione

Dunque il 1.° numero sarà 20. Il 2.° 40. Il 3.° 80.

Verificazione

1.° I tre numeri stanno fra loro in proporzione doppia. 2.° Il loro prodotto poi è $20 . 40 . 80 = 2 . 4 . 8000 = 64000$, come dice il problema.

Problema XCVII.

Un pollajuolo cambia delle anitre con alcune galline in ragione di due anitre per tre galline. Ciascuna gallina fa tante uova da eguagliare la terza parte delle galline, ed il pollajuolo vende al mercato 9 uovi per

tanti soldi, quante sono le uova, che ciascuna gallina ha fatte, e ne cava in tutto soldi 72. Si domanda quante anitre abbia cambiate, e quindi quante galline abbia ricevute, e quante uova faccia ogni gallina.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero delle galline cambiate dal pollajuolo: quello delle galline ricevute in cambio, cambiando due anitre per tre galline, sarà $\frac{3x}{2}$, e ciascuna gallina facendo uova $\frac{3x}{2} \times \frac{1}{3}$, ossia $\frac{x}{2}$, il numero totale delle uova sarà $\frac{x}{2} \times \frac{3x}{2}$, ossia $\frac{3x^2}{4}$. Ma 9 uovi si vendono per soldi $\frac{x}{2}$. Dunque l'importo del denaro, che debbono produrre uova $\frac{3x^2}{4}$ si avrà dal 4.° termine della proporzione

$$9 : \frac{x}{2} :: \frac{3x^2}{4} : 4^{to} = \frac{3x^3}{9 \cdot 8} = \frac{x^3}{24}.$$

Ma questo importo per condizione del problema è soldi 72. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$\frac{x^3}{24} = 72$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per 24. 2.° Si estragga la radice cubica, e sarà

$$x = \sqrt[3]{1728} = 12$$

Conclusione

Dunque il pollajuolo avrà cambiate 12 anitre, e cambiando due anitre per tre galline, le galline ricevute nel cambio saranno 18. Ciascuna gallina poi fece uova $\frac{18}{3}$, ossia 6, onde tutte insieme avranno fatto 108 uovi.

Verificazione

L'importo totale delle uova debb'essere di soldi 72. Se 9 uova infatti sonosi vendute per soldi 6, avremo pel totale la proporzione

$$9 : 6 :: 108 : 4^{to} = \frac{6 \cdot 108}{9} = \frac{648}{9} = 72$$

Problema XCVIII.

Un Signore riceve tutti gli anni da ciascuno de' suoi pigionanti tante some di frumento, quanto è l'$m.^{plo}$, e tante di vino, quanto è l'$n.^{plo}$ del numero de' pigionanti. Ora avendo egli venduto in un anno tutto il frumento a q volte tante lire alla soma, e tutto il vino a p volte tante lire, quanti sono i pigionanti, ebbe di rendita lir. r. Cercasi il numero de' pigionanti.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x questo numero. Il Signore vende some di frumento mx^2, perchè ciascun pigionante darà some mx, e il totale del frumento sarà quindi $mx \cdot x$, ossia mx^2. Ma lo vende al prezzo qx. Dunque il totale dell' importo per la vendita del frumento sarà mqx^3. Collo stesso raziocinio l' importo totale per le some vendute del vino sarà npx^3. Ma queste due somme debbono fare la somma totale r. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$mqx^3 + npx^3 = r$$

Soluzione

1.° Sciolgasi la x^3 ne' suoi fattori. 2.° Si divida per $mq + np$. 3.° Si estragga la radice cubica, e si avrà

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{r}{mq + np}\right)}$$

Conclusione

Dunque il numero de' pigionanti sarà espresso dalla formola $\sqrt[3]{\left(\frac{r}{mq + np}\right)}$

Verificazione

Il cubo di questa formola è $\frac{r}{mq + np}$. Ora questo cubo, se la soluzione è esatta, moltiplicato per $mq + np$ ci deve dare r. Ed è infatti

$$(mq + np)\left(\frac{r}{mq + np}\right) = r\left(\frac{mq + np}{mq + np}\right) = r$$

Applicazione

Riceva il Signore da ciascuno de' suoi pigionanti tante some di frumento ogni anno, quanto è il triplo, e tante di vino, quanto è il quintuplo del numero de' pigionanti; e suppongasi, che avendo egli venduto in un anno tutto il frumento a quattro volte tante lire alla soma, e tutto il vino a tre volte tante lire, quanti sono i pigionanti, avesse ricevuto lir. 27000. Cercasi il numero de' pigionanti. Avremo

$$m = 3\,;\, n = 5\,;\, q = 4\,;\, p = 3\,;\, r = 27000$$

Dunque $x = \sqrt[3]{\left(\frac{27000}{12 + 15}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{27000}{27}\right)} = \sqrt[3]{1000} = 10$

Conclusione

Dunque 10 erano i pigionanti.

Verificazione

Il Signore riceve some di frumento da ciascuno de' pigionanti eguali al triplo del loro numero. Dunque 30 da ciascuno. Dunque 300 da tutti. Vende il frumento al quadruplo del numero de' pigionanti per ogni soma. Dunque a lir. 40. Dunque l'importo totale del frumento sarà lir. 12000. Riceve some di vino da ciascuno de' pigionanti eguali al quintuplo del loro numero. Dunque 50 da ciascuno. Dunque 500 da tutti. Vende il vino al triplo del numero de' pigionanti per ogni soma. Dunque a lir. 30. Dunque l'importo totale del vino sarà lir. 15000. E questi due ricavi danno $12000 + 15000 = 27000$, come doveasi verificare.

Problema XCIX.

Alcuni negozianti formano una società, e stabiliscono un capitale, cui ciascuno contribuisce dieci volte tanti scudi, quanto è il numero dei socj. Il negozio guadagna per ogni 100 scudi 6 scudi di più di un numero di scudi eguale al numero de' socj, e il guadagno totale è di scudi 392. Quanti sono i socj.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero de' socj. Ciascuno depose scudi $10x$, onde il ca-

pitale intero sarà $10x.x$, ossia $10x^2$, e guadagnandosi $x+6$ per $\frac{0}{0}$ dal negozio, il guadagno sull'intero capitale sarà

$$10x^2\left(\frac{x+6}{100}\right)=\frac{10x^3+60x^2}{100}=\frac{x^3+6x^2}{10}$$

Ma questo guadagno debb'essere di scudi 392. Dunque avrassi la seguente

EQUAZIONE DEL PROBLEMA

$$\frac{x^3+6x^2}{10}=392$$

SOLUZIONE

1.° Si moltiplichi per 10. 2.° Facciasi $x=2y$, e l'equazione diverrà

$$8y^3+24y^2=3920$$

3.° Si divida per 8, e sarà $y^3+3y^2=490$
4.° Sciolta questa equazione col metodo dei divisori dell'ultimo termine (Vedi cit. elem. pag. 153), si avrà tra questi il 7, che la verifica.
5.° Dunque $y=7$. 6.° Ma $x=2y$. Dunque sarà $x=14$

CONCLUSIONE

Dunque 14 saranno i negozianti associati.

VERIFICAZIONE

Ciascuno de' socj depose scudi 140, onde il capitale intero sarà di scudi 14.140, ossia 1960. I socj guadagnano 20 scudi per $\frac{0}{0}$ scudi. Dunque il guadagno sull'intero capitale sarà, come doveasi trovare

$$\frac{20.1960}{100}=\frac{39200}{100}=392$$

PROBLEMA C.

Data la differenza d trovare tre numeri, che siano in progressione aritmetica, e che formino un prodotto eguale ad a.

RAZIOCINIO PER L'EQUAZIONE

Sia y il numero medio. Il medio meno la differenza darà il 1.°; ed

il medio più la differenza darà il 3.° Ma il prodotto di questi tre numeri debb' essere uguale ad a. Dunque si avrà la seguente

EQUAZIONE DEL PROBLEMA

$$y(y-d)(y+d)=a$$

SOLUZIONE

1.° Si eseguiscano le accennate moltipliche. 2.° Si riduca l'equazione a zero, e si avrà

$$y^3-d^2y-a=0$$

3.° Si sciolga questa equazione coll' uso delle formole Cardaniche (Vedi cit. Elem. pag. 135.), e fatto $n=a$; $m=d^2$ si otterrà

$$y=\sqrt[3]{\left\{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-\frac{d^6}{27}\right)}\right\}}+\sqrt[3]{\left\{\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-\frac{d^6}{27}\right)}\right\}} \qquad (\varphi)$$

CONCLUSIONE

Dunque il 1.° numero sarà $\varphi-d$; il 2.° φ; ed il 3.° $\varphi+d$

VERIFICAZIONE

Che i tre numeri sieno in progressione aritmetica è evidente, perchè la differenza, che passa fra loro è sempre d. Se facessimo il prodotto dei tre numeri uscirebbe una quantità sola a, svanendo tutti gli altri termini. Ma verificheremo con maggiore speditezza la formola nella seguente

APPLICAZIONE

Supponiamo, che la differenza della progressione sia 3, e che il prodotto dei tre numeri sia 28. Avremo

$$d=3\,;\ a=28$$

Dunque $y=\sqrt[3]{\left\{\frac{28}{2}+\sqrt{\left(\frac{784}{4}-\frac{27\cdot 27}{27}\right)}\right\}}+\sqrt[3]{\left\{\frac{28}{2}-\sqrt{\left(\frac{784}{4}-\frac{27\cdot 27}{27}\right)}\right\}}$

$$y=\sqrt[3]{\left\{14+\sqrt{(196-27)}\right\}}+\sqrt[3]{\left\{14-\sqrt{(196-27)}\right\}}$$

$$y=\sqrt[3]{(14+\sqrt{169})}+\sqrt[3]{(14-\sqrt{169})}=\sqrt[3]{(14+13)}+\sqrt[3]{(14-13)}=\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{1}=3+1=4$$

CONCLUSIONE

Dunque il 1.° numero sarà $4-3$, ossia 1. Il 2.° 4. Il 3.° $4+3$, ossia 7

Verificazione

1.° I tre numeri 1, 4, 7 sono in progressione aritmetica colla differenza 3. 2.° Il prodotto di $1 \times 4 \times 7$ è 28, come si è supposto nell'applicazione.

Problema CI.

Qual è quel numero, il cui cubo diminuito di esso numero moltiplicato per 36 dà 91 di residuo.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x questo numero. Al suo cubo x^3 sottratto $36x$ dobbiamo avere una quantità eguale a 91. Dunque si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$x^3 - 36x = 91$$

Soluzione

Sciolta l'equazione come quella del problema antecedente si otterrà

$$x = \sqrt[3]{\left\{\frac{91}{2} + \sqrt{\left(\frac{8281}{4} - \frac{46656}{27}\right)}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{\frac{91}{2} - \sqrt{\left(\frac{8281}{4} - \frac{46656}{27}\right)}\right\}}$$

$$x = \sqrt[3]{\left\{\frac{91}{2} + \sqrt{\left(\frac{8281}{4} - 1728\right)}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{\frac{91}{2} - \sqrt{\left(\frac{8281}{4} - 1728\right)}\right\}}$$

$$x = \sqrt[3]{\left\{\frac{91}{2} + \sqrt{\left(\frac{8281 - 6912}{4}\right)}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{\frac{91}{2} - \sqrt{\left(\frac{8281 - 6912}{4}\right)}\right\}}$$

$$x = \sqrt[3]{\left\{\frac{91}{2} + \sqrt{\left(\frac{1369}{4}\right)}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{\frac{91}{2} - \sqrt{\left(\frac{1369}{4}\right)}\right\}} = \sqrt[3]{\left(\frac{91+37}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{91-37}{2}\right)} = \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{27} = 4 + 3 = 7$$

Conclusione

Dunque 7 sarà il numero cercato.

Verificazione

Il cubo di 7 è 343; ed il settuplo di 36 è 252. Quindi $343 - 252 = 91$, come dovevasi verificare.

Problema CII.

Cercansi due medj proporzionali tra i numeri 5, e 625.

Raziocinio per le Equazioni

Chiamisi x uno de'medj, ed y l'altro. Per condizione del problema si potranno instituire le due proporzioni

$$5 : x :: x : y$$
$$x : y :: y : 625$$

Fatto in ambedue il prodotto degli estremi, e de'medj si otterranno le seguenti

Equazioni del Problema

$$1.^a \quad x^2 = 5y$$
$$2.^a \quad y^2 = 625x$$

Soluzione

1.° Si estragga la radice quadrata nella 1.ª, assumendo il solo segno positivo. 2.° Si divida per 625 la 2.ª, e si avranno i due valori

$$x = \sqrt{5y} \; ; \; x = \frac{y^2}{625} \qquad (m)$$

3.° Si paragonino tra loro. 4.° Si quadri l'equazione, che n'emerge. 5.° Si divida per y, e si moltiplichi per 390625. 6.° Si estragga la radice cubica, e sarà

$$y = \sqrt[3]{1953125} = 125$$

7.° Si sostituisca questo valore in una delle due equazioni (m), e si otterrà

$$x = \sqrt{125 . 5} = \sqrt{625} = 25$$

Conclusione

Dunque i due medj proporzionali tra 5, e 625 sono 25, e 125

Verificazione

Si verifica infatti la proporzione 5 : 25 :: 125 : 625, essendo il prodotto degli estremi 3125, e 3125 parimenti quello de' medj.

Problema CIII.

Trovar due numeri tali, che la loro somma sia eguale al quadrato del numero minore, e la differenza de' loro quadrati sia eguale al cubo dello stesso numero minore.

Raziocinio per le Equazioni

Facciasi x il numero maggiore, ed y il minore. Eseguite le condizioni del problema si avranno le due seguenti

Equazioni del Problema

$$1.^a \quad x+y=y^2$$
$$2.^a \quad x^2-y^2=y^3$$

Soluzione

1.° Si sottragga y nella 1.ª e sarà . . . . . $x=y^2-y$ (q)
2.° Si quadri questa equazione, e quindi si sostituisca il valore della x^2 nella 2.ª equazione. 3.° Si riducano i termini dell'equazione, che ne sorte. 4.° Si divida per y^3. 5.° Si aggiunga 2, e sarà

$$y=3$$

6.° Pongasi questo valore nell'equazione (q), e otterrassi

$$x=9-3=6$$

Conclusione

Dunque 6, e 3 saranno i due numeri cercati.

Verificazione

1.° La somma de'numeri è $6+3=9=3^2$, cioè al quadrato del minore.
2.° La differenza de'loro quadrati è $36-9=27=3^3$, cioè al cubo dello stesso minore.

PROBLEMI DI QUARTO GRADO

Problema CIV.

Un padre di famiglia dà tante migliaja di lire a ciascuno de' suoi figli, quanto è il loro numero, perchè unitamente s'impieghino nel commercio. Dopo un dato tempo egli trovò, che avendo essi la somma di lir. 31250 guadagnarono sul capitale tanto per $\frac{0}{0}$, quanto era il quadrato del loro numero. Quanti sono i figli.

Raziocinio per l'Equazione

Siano x i figli. Saranno $1000x$ le lire date dal padre a ciascuno di essi, e $1000x \cdot x$, ossia $1000x^2$ sarà l'intero loro capitale. Il guadagno su questo capitale, se 100 dà x^2, avrassi dalla proporzione

$$100 : x^2 :: 1000x^2 : 4^{to} = \frac{1000x^4}{100} = 10x^4$$

Ma il capitale, più il guadagno debbono fare lir. 31250. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$10x^4 + 1000x^2 = 31250$$

Soluzione

1.° Si divida per 10. 2.° Sciolgasi questa equazione del 4.° grado col metodo delle quadratico-affette (Vedi Elem. cit. pag. 144), e sarà

$$x^2 = -50 \pm \sqrt{5625} = -50 \pm 75$$

3.° Preso il segno superiore, non soddisfacendo l'inferiore alle condizioni del problema, ed estratta la radice quadrata, si otterrà

$$x = \sqrt{25} = 5$$

Conclusione

Dunque 5 erano i figli.

Verificazione

Il padre diede a ciascuno lir. 5000; onde l'intero capitale sarà lir. 25000. I figli sopra questo capitale guadagnano il 25 per $\frac{0}{0}$. Dunque il guadagno sarà $\frac{25 \cdot 25000}{100} = 25 \cdot 250 = 6250$. Aggiunto questo guadagno al capitale si hanno lir. $25000 + 6250 = 31250$, ch' è il denaro trovato dal padre presso i figli.

Problema CV.

Interrogato un Signore se avesse debiti, o crediti, rispose: io ho tante migliaja di lire di credito, quante sono le unità nella somma delle radici positive, e tante di debito, quante sono le unità nella somma delle radici negative dell' equazione $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$. Di quanto sarà egli debitore, o creditore.

Raziocinio per l' Equazione

L'equazione del problema essendo già data non dobbiamo far altro, che scioglierla, e la scioglieremo col metodo dei divisori dell' ultimo termine.

Soluzione

I divisori dell'ultimo termine sono 1, 2, 3, 4, 6, 12

Fatto $x = 1$ abbiamo . $1 + 2 - 7 - 8 + 12 = 15 - 15 = 0$
$x = 2$ . . . . . $16 + 16 - 28 - 16 + 12 = 44 - 44 = 0$
$x = -2$ . . . . . $16 - 16 - 28 + 16 + 12 = 44 - 44 = 0$
$x = -3$ . . . . . $81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 117 - 117 = 0$

Conclusione

Dunque 1, 2, − 2, − 3 saranno le quattro radici dell'equazione proposta. Dunque il Signore avrà lir. 2000 di debito.

Verificazione

La verificazione si ha dal processo medesimo della soluzione, perchè abbiamo veduto ridursi attualmente a zero l' equazione in tutte quattro le fatte supposizioni pel valore dell'incognita.

Ciò non ostante si può verificare la soluzione coll' applicazione del teorema, che dimostrasi ne' citati Elem. alla pag. 145.

SOMMA DELLE RADICI

$$1+2-2-3=3-5=-2$$

Ma il coefficiente del 2.° termine nella data equazione è 2. Dunque la somma delle quattro radici è uguale a questo coefficiente col segno mutato.

SOMMA DE' PRODOTTI DELLE RADICI DUE A DUE

$$1\times2+1\times-2+1\times-3+2\times-2+2\times-3-2\times-3=2-2-3-4-6+6=8-15=-7$$

Ma il coefficiente del 3.° termine è -7. Dunque la somma de' prodotti delle radici due a due è uguale a questo coefficiente col proprio segno.

SOMMA DE' PRODOTTI DELLE RADICI TRE A TRE

$$1\times2\times-2+1\times2\times-3+1\times-2\times-3+2\times-2\times-3=-4-6+6+12=18-10=8$$

Ma il coefficiente del 4.° termine è -8. Dunque la somma de' prodotti delle radici tre a tre è uguale a questo coefficiente col segno mutato.

PRODOTTO DELLE RADICI

$$1\times2\times-2\times-3=12$$

Ma l'ultimo termine è 12. Dunque il prodotto delle quattro radici è eguale all'ultimo termine col proprio segno.

PROBLEMA CVI.

Il Comandante d'una fortezza assediata scrive al suo Re, che nella somma delle quattro radici dell' equazione

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \qquad (A)$$

in cui alle formole generali si applichi il caso particolare di $a=-10$; $b=35$; $c=-50$; $d=24$, esprimesi il giorno del mese, che corre, entro il quale egli si deve arrendere, se non riceve sussidj. Le formole generali, e quindi questo giorno si ricercano dall'inimico, nelle cui mani cadde il viglietto.

RAZIOCINIO PER L'EQUAZIONE

L' equazione essendo data non dovrassi far altro, che passare alla

sua soluzione. Si è scelto questo problema per applicarvi il metodo del Bombelli, che noi esporremo con tutta la chiarezza, che ci sembra sufficiente per farlo conoscere a chicchessia iniziato negli studi dell'algebra. Trovate, che si saranno le formole generali, verranno applicate al caso particolare del problema, e troverassi il giorno, di cui si cerca.

Soluzione

Si assuma per isciogliere la data equazione quest' altra equazione sussidiaria

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+p\right)^2-\left(qx+r\right)^2=0 \qquad (\varphi)$$

A questa debb' essere paragonata la proposta (A). Egli è manifesto, che si dovranno determinare le lettere p, q, r in modo, che si ottengano delle quantità eguali ai coefficienti di (A), giacchè nelle sue dimensioni l'incognita è in ambedue uniforme. Si eseguiscano i quadrati accennati in (φ), e la x elevata alle diverse potenze si ponga sotto i suoi fattori. L' equazione sussidiaria diventerà

$$x^4+ax^3+\left(\frac{a^2}{4}+2p-q^2\right)x^2+\left(ap-2qr\right)x+p^2-r^2=0$$

Paragonati i coefficienti di questa equazione con quelli di (A), meno i due primi, che sono eguali, si avrà

$$\frac{a^2}{4}+2p-q^2=b \qquad (\pi)$$

$$ap-2qr=c \qquad (\pi')$$

$$p^2-r^2=d \qquad (\pi'')$$

Aggiunta in (π) la quantità q^2. . . . . $\frac{a^2}{4}+2p=b+q^2$

Sottratto b. . . . . $\frac{a^2}{4}+2p-b=q^2$ (φ')

Ordinata l'equazione per q, ed estratta la radice . . $q=\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}+2p-b\right)}$ (λ)

Aggiunto $2qr$ in (π'), e sottratto c . . . . . $ap-c=2qr$ (φ'')

Ordinata l'equazione per r, e divisa per $2q$ . . . $r=\frac{ap-c}{2q}$ (λ')

Aggiunta r^2 in (π''), e sottratto d. . . . . $r^2=p^2-d$ (λ'')

Avremo qui pertanto tre equazioni, da cui ricavare p, q, r. La maniera più facile per ottenere l'intento è la seguente

Si moltiplichi (φ') per 4 . . . . . $4q^2 = a^2 + 8p - 4b$

Si moltiplichi questa equazione per (λ'') . . . . . $4q^2r^2 = (a^2 + 8p - 4b)(p^2 - d)$

Ed eseguite le moltipliche . . . $4q^2r^2 = 8p^3 + (a^2 - 4b)p^2 - 8dp - d(a^2 - 4b)$ (B)

Si quadri (φ'') . . . . . $4q^2r^2 = a^2p^2 - 2acp + c^2$ (B')

Si paragoni (B) con (B') . . . $8p^3 + (a^2 - 4b)p^2 - 8dp - d(a^2 - 4b) = a^2p^2 - 2acp + c^2$

Ridotta l'equazione a zero sarà . . $8p^3 - 4bp^2 + (2ac - 8d)p - d(a^2 - 4b) - c^2 = 0$ (E)

Da questa equazione, che si può sciogliere colle formole Cardaniche, eliminato il 2.° termine, ricaverassi il valore di p, e determinato p dato per a, b, c, d si troveranno agevolmente i valori di q, e di r dalle due equazioni (λ), ed (λ'). Determinati questi valori per ciascun caso dato, ecco in quale modo ottener si potranno le quattro radici dell'equazione proposta.

Si aggiunga $(qx + r)^2$ in (φ) . . . . . $\left(x^2 + \frac{ax}{2} + p\right)^2 = \left(qx + r\right)^2$

Si estragga la radice, preso il segno positivo . $x^2 + \frac{ax}{2} + p = qx + r$ (M)

E preso il negativo . . . . . $x^2 + \frac{ax}{2} + p = -qx - r$ (M')

Si sciolgano finalmente queste due equazioni col solito metodo per le equazioni del 2.° grado, e si avranno così le quattro radici, che si cercano.

Ora venendo al caso particolare del nostro problema si sostituiscano in (E) i dati valori, e si avrà l'equazione

$$8p^3 - 140p^2 + 808p - 1540 = 0$$

E dividendo per 4 . . $2p^3 - 35p^2 + 202p - 385 = 0$

Questa equazione sciogliendosi più facilmente col metodo dei divisori dell'ultimo termine, che colle formole Cardaniche, la scioglieremo così. Tentati i divisori dell'ultimo termine positivi, e negativi, trovasi l'equazione ridotta a zero, ove si faccia $p = 5$. Dunque si riterrà $p = 5$. E conseguentemente avremo da (λ)

$$q = \sqrt{\left(\frac{100}{4} + 10 - 35\right)} = \sqrt{(25 + 10 - 35)} = \sqrt{(35 - 35)} = 0$$

E dall'equazione (λ'') . . . . $r^2 = 25 - 24 = 1$, donde estratta la radice, preso il segno positivo, si avrà $r = 1$. Sostituiti pertanto questi valori nelle equazioni (M), ed (M'), avremo

$$x^2 - 5x = 1 - 5 = -4$$
$$x^2 - 5x = -1 - 5 = -6$$

Sciolte ambedue queste equazioni col solito metodo di 2.° grado ci daranno

$$x = \frac{8}{2} = 4 \; ; \; x = \frac{2}{2} = 1 \; ; \; x = \frac{6}{2} = 3 \; ; \; x = \frac{4}{2} = 2$$

Conclusione

Dunque le quattro radici della proposta equazione saranno 1, 2, 3, 4, che sommate danno 10. Dunque ai 10 del mese il Generale si arrenderà, ove non riceva sussidio.

Verificazione

L' equazione generale (A) sostituiti alle lettere i valori determinati dallo stesso problema cangiasi nella seguente

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

Se a luogo della x porremo ciascuno de' quattro valori, che abbiamo trovato, l' equazione dovrassi ridurre a zero, se questi valori sono esatti. Ed è realmente

Presa $x = 1$ . . . . . $1 - 10 + 35 - 50 + 24 = 60 - 60 = 0$

$x = 2$ . . . . . $16 - 80 + 140 - 100 + 24 = 180 - 180 = 0$

$x = 3$ . . . . . $81 - 270 + 315 - 150 + 24 = 420 - 420 = 0$

$x = 4$ . . . . . $256 - 640 + 560 - 200 + 24 = 840 - 840 = 0$

Problema CVII.

Un Generale ha dato tre battaglie; e tante ne ha vinte, quante sono le unità nelle radici positive reali, tante ne ha perdute, quante sono le unità nelle radici negative reali dell'equazione $x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6 = 0$. Quante battaglie ha perdute, e quante ne ha vinte.

Raziocinio per l' Equazione

Essendo data l' equazione non debbesi far altro, che passare alla sua soluzione. Noi tenteremo di sciogliere la coll' applicazione delle formole, che si hanno dal metodo di Eulero, (Vedi cit. Elem. pag. 141) per dare una norma di calcolo anche in questo metodo, e trovando, ch' essa non si può sciogliere così, perchè ci guida al caso Irreducibile, la scioglieremo col metodo dei divisori dell' ultimo termine, onde rispondere al problema.

SOLUZIONE

L'equazione generale, che nel metodo di Eulero nasce dalla formola $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, dove p, q, r fanno le funzioni di radici dell'equazione sussidiaria di 3.° grado $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$, è la seguente

$$x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0$$

L'altra equazione generale poi, che serve per tutte le applicazioni è la seguente

$$x^4 - ax^2 - bx - c = 0$$

i cui termini paragonati con quelli della equazione superiore danno le formole

$$f = \frac{a}{2}\ ;\ h = \frac{b^2}{64}\ ;\ g = \frac{a^2}{16} + \frac{c}{4}$$

Ciò posto: prendasi la data equazione del nostro problema. Osserviamo primieramente, che questa ha il termine moltiplicato per x^3, e che esso termine non vi ha nell'equazione generale. Convien dunque trasformare la data equazione in un'altra, che sia mancante di questo termine. Per ottenere ciò facciasi $x = y - \frac{1}{4}$, e fatte le necessarie semplificazioni nella equazione elevata alle corrispondenti potenze qui accennate, cioè nell'equazione

$$\left(y - \frac{1}{4}\right)^4 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^3 - 5\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - 3\left(y - \frac{1}{4}\right) + 6 = 0$$

si avrà l'equazione . . . . . $y^4 - \frac{43y^2}{8} - \frac{3y}{8} + \frac{1645}{256} = 0$

Da questa equazione bisogna eliminare i denominatori, al quale oggetto si prenda $y = \frac{u}{4}$, e l'equazione diventerà

$$\frac{u^4}{16 \cdot 16} - \frac{43u^2}{8 \cdot 16} - \frac{3u}{8 \cdot 4} + \frac{1645}{256} = 0$$

Moltiplicata tutta l'equazione per 256 si otterrà

$$u^4 - 86u^2 - 24u + 1645 = 0$$

Confrontata colle formole generali di sopra esposte, avremo

$$a = 86\ ;\ b = 24\ ;\ c = -1645$$

E quindi . . . . . $f = \frac{a}{2} = \frac{86}{2} = 43\ ;\ h = \frac{b^2}{64} = \frac{24^2}{64} = \frac{576}{64} = 9$

$$g = \frac{a^2}{16} + \frac{c}{4} = \frac{86^2}{16} - \frac{1645}{4} = \frac{7396 - 6580}{16} = \frac{816}{16} = 51$$

Conseguentemente l'equazione generale sussidiaria del 3.° grado sarà nel caso nostro

$$z^3 - 43z^2 + 51z - 9 = 0$$

Questa equazione, seguendo il metodo di Eulero, debb'essere sciolta colle formole Cardaniche; e quindi bisogna anche da essa eliminare il 2.° termine moltiplicato per z^2, e poi le frazioni. A tale intento facciasi $z = m + \frac{43}{3}$. L'equazione diverrà

$$\left(m + \frac{43}{3}\right)^3 - 43\left(m + \frac{43}{3}\right)^2 + 51\left(m + \frac{43}{3}\right) - 9 = 0$$

Sviluppati questi binomj coll'innalzarli alle corrispondenti potenze, e semplificati i termini si avrà

$$m^3 - \frac{1696m}{3} - \frac{139520}{27} = 0$$

E fatto $m = \frac{t}{3}$ sarà $\frac{t^3}{27} - \frac{1696t}{9} - \frac{139520}{27} = 0$

Moltiplicata tutta l'equazione per 27 si avrà . . . $t^3 - 3.1696t - 139520 = 0$

Ossia . . . . . $t^3 - 3.1696t - 2.69760 = 0$

Quindi per le sostituzioni nelle formole Cardaniche avremo

$$m = 3.1696\,;\ n = 2.69760$$

Dunque la formola per la prima radice sarà

$$x = \sqrt[3]{\left\{\frac{2.69760}{2} + \sqrt{\left(\frac{4.69760^2}{4} - \frac{27.1696^3}{27}\right)}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{\frac{2.69760}{2} - \sqrt{\left(\frac{4.69760^2}{4} - \frac{27.1696^3}{27}\right)}\right\}}$$

Ed $x = \sqrt[3]{\left\{69760 + \sqrt{(4866457600 - 4878401536)}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{69760 - \sqrt{(4866457600 - 4878401536)}\right\}}$

Ma sotto il radicale quadrato abbiamo maggiore la quantità negativa della positiva. Dunque l'equazione apparterrà al caso Irreducibile. Dunque colle formole di Eulero non si potrà sciogliere il dato problema.

Sciolgasi pertanto col metodo dei divisori dell'ultimo termine, come si è fatto col problema 105.°, ed avremo

Fatta $x = 1$ . . . . . $1 + 1 - 5 - 3 + 6 = 8 - 8 = 0$

$x = -2$ . . . . . $16 - 8 - 20 + 6 + 6 = 28 - 28 = 0$

Fatta la moltiplica dei due binomj $x - 1 = 0$, $x + 2 = 0$ si avrà l'equazione $x^2 + x - 2$. Divisa l'equazione proposta per questo prodotto si otterrà l'equazione $x^2 - 3 = 0$, che sciolta col metodo delle equazioni pure del 2.° grado ci darà $x = \pm\sqrt{3}$

Conclusione

Dunque le radici della equazione proposta sono $1, -2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$. Dunque il Generale ha perduto due battaglie, ed una ne ha vinta.

Verificazione

La verificazione si potrebbe ottenere come al problema 105.° colla stessa facilità.

PROBLEMI INDETERMINATI DI PRIMO GRADO

Problema CVIII.

In quanti modi si possono pagare lir. 1000 in monete a lir. 20, ed a lir. 16.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero delle monete a lir. 20, ed y quello delle monete a lir. 16, che si possono dare per formare la somma di lir. 1000. Avremo la seguente

Equazione del Problema

$$20x + 16y = 1000$$

Soluzione

1.° Si divida per 4. 2.° Si sottragga $4y$. 3.° Si divida per 5, e si avrà

$$x = \frac{250 - 4y}{5}$$

Perchè x sia una quantità intera, la quantità $250 - 4y$ debb'essere esattamente divisibile per 5. Ma il 250 lo è già, perchè multiplo di 5. Dunque dovrà esserlo anche $4y$. Dunque il minimo valore, che potrassi

dare ad y sarà 5. Ma x debb'essere anche positiva. Dunque dovrà essere $250 > 4y$, ossia $\frac{250}{4} > y$. Dunque il massimo valore della y sarà 60.

Fatta $y = 5$ . . . . . $x = \frac{250 - 20}{5} = \frac{230}{5} = 46$

E fatta $y = 10$ . . . . . $x = \frac{250 - 40}{5} = \frac{210}{5} = 42$

Dunque i valori della y cominciano dal 5, e finiscono al 60 in progressione aritmetica crescente colla differenza 5, ed i valori della x cominciano dal 46, e finiscono al 2 in progressione decrescente colla differenza 4.

Conclusione

Dunque tutte le combinazioni possibili saranno le seguenti

Per x 46, 42, 38, 34, 30, 26, 22, 18, 14, 10, 6, 2

Per y. 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60

Verificazione

Prendansi la seconda, e l'ultima combinazione, ed avremo

1.ª N.° 2 a lir. 20	lir.	40	2.ª N.° 42 a lir. 20 . . .	lir.	840
N.° 60 a lir. 16. . . .	»	960	N.° 10 a lir. 16. . . .	»	160
Totale . . .	lir.	1000	Totale . . .	lir.	1000

Osservazione

È da riflettersi a questa bella particolarità, che la differenza della progressione pei valori della x è il coefficiente 4 della y nell'equazione del problema semplificata; e viceversa, che la differenza della progressione pei valori della y è il coefficiente 5 della x. Questa particolarità si verifica anche ne' problemi seguenti.

Problema CIX.

Trovare due numeri tali, che il triplo del 1.° faccia 60 diminuito del doppio del 2.°

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il 1.° numero; y il 2.° Eseguita la condizione del problema si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$3x = 60 - 2y$$

Soluzione

Si divida per 3, e si avrà $x = \frac{60 - 2y}{3} = 2\left(\frac{30 - y}{3}\right)$

Perchè x sia positiva debb'essere $30 > y$. Ma debb'essere anche un numero intero. Dunque la quantità $30 - y$ debb'essere esattamente divisibile per 3. Ma 30 lo è già. Dunque y dovrà essere un multiplo di 30, cominciando dal suo valor massimo, che sarà 27, e proseguendo sino al 3 in progressione decrescente, il qual valore sarà il minimo.

Fatta $y = 3$ . . . . . $x = 2\left(\frac{30 - 3}{3}\right) = \frac{2 \cdot 27}{3} = 18$

E fatta $y = 6$ . . . . . $x = 2\left(\frac{30 - 6}{3}\right) = \frac{2 \cdot 24}{3} = 16$

Dunque i valori della x cominceranno dal 18, e progrediranno decrescendo colla differenza 2 sino al 2, che sarà il valor minimo.

Conclusione

Dunque tutte le combinazioni possibili saranno le seguenti

Per x. 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2

Per y 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27

Verificazione

Prendasi la 4.ª combinazione, in cui abbiamo $x = y = 12$

Il triplo del 1.° numero 12 è 36. Se al 60 sottrarremo il doppio del 2.° numero 12, ch'è 24, si avrà precisamente il residuo 36. Egualmente si verificherebbero tutte le altre.

Problema CX.

Cercasi in quanti modi con lir. 1575 in tanti zecchini a lir. 15 si possa pagare un debito di lir. 728, ricevendo in iscambio pel di più, che si potesse sborsare, tante pezze a lir. 7.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il numero degli zecchini, che si vogliono impiegare per pagare il debito, ed y quello delle pezze, che si possono ricevere in iscambio pel di più. Egli è chiaro, che zecchini x a lir. 15 saranno eguali al debito da pagarsi, più le pezze y, che si possono ricevere pel di più. Avrassi pertanto la seguente

Equazione del Problema

$$15x = 728 + 7y$$

Soluzione

1.° Si sottragga 728. 2.° Si ordini l'equazione per y. 3.° Si divida per 7, e sarà

$$y = \frac{15x - 728}{7}$$

Collo stesso raziocinio de' problemi antecedenti si vedrà, che i valori della x debbono essere multipli di 7, e maggiori di 48; onde il minimo sarà 49.

Fatta $x = 49$. . . . . $y = \frac{15 . 49 - 728}{7} = \frac{735 - 728}{7} = \frac{7}{7} = 1$

E fatta $x = 56$. . . . . $y = \frac{15 . 56 - 728}{7} = \frac{840 - 728}{7} = \frac{112}{7} = 16$

Dunque i valori della y dall'uno cresceranno colla differenza 15 sino al 121. Oltre questo limite non possono estendersi le combinazioni, perchè se si facesse $x = 112$ si avrebbe una somma di lir. 1680 eccedente quella, ch' è indicata nel problema.

Conclusione

Dunque tutte le combinazioni possibili saranno le seguenti

Per x 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105

Per y 1, 16, 31, 46, 61, 76, 91, 106, 121

Verificazione

Verifichiamo la 1.ª combinazione. In questa si danno zecchini 49, che a lir. 15 fanno lir. 735. Ma il debito è soltanto di lir. 728. Dunque

si pagherebbero di più lir. 7, e questo infatti è il valore di quella pezza rappresentata per y, che in questa combinazione si riceve pel denaro sborsato di più.

Problema CXI.

Se sia possibile pagare lir. 2000 in monete parte a lir. 27, e parte a lir. 21.

Raziocinio per l'Equazione

Sieno x le monete a lir. 21, ed y quelle a lir. 27. Noi avremo la seguente

Equazione del Problema

$$21x + 27y = 2000$$

Soluzione

1.° Si sottragga $27y$. 2.° Si divida per 21, e si avrà $x = \frac{2000 - 27y}{21}$

3.° Si cavino tutti gl'interi possibili. . . . . $x = -y + 95 + \left(\frac{5-6y}{21}\right)$

4.° Facciasi $\frac{5-6y}{21} = p$. 5.° Si moltiplichi questa equazione per 21.

6.° Si sottragga $21p$. 7.° Si ordini per y, e si divida per 6, sarà

$$y = \frac{5-21p}{6} = -3p + \left(\frac{5-3p}{6}\right)$$

7.° Facciasi $\frac{5-3p}{6} = q$. 8.° Si moltiplichi questa equazione per 6. 9.° Si aggiunga $3p$. 10.° Si sottragga $6q$. 11.° Si ordini per p, e si divida per 3, si avrà

$$p = \frac{5-6q}{3} = -2q + 1 + \frac{2}{3}$$

12.° Facciasi $\frac{2}{3} = r$. 13.° Si moltiplichi questa equazione per 3, e si otterrà

$$2 = 3r$$

Conclusione

Qualunque numero intero sostituiscasi ad r la soluzione del problema è impossibile, perchè si avrebbe sempre un' equazione assurda.

Dunque non si potrà effettuare, senza frazioni, il pagamento di lir. 2000 in tante monete a lir. 27, ed a lir. 21.

Problema CXII.

Un mercante è debitore di lir. 1200. In mancanza di denaro offre in pagamento una stoffa di lir. 7 al metro, ed un' altra di lir. 5. In quanti modi potrà pagare il debito.

Raziocinio per l' Equazione

Siano x i metri della 1.ª stoffa, ed y quelli della 2.ª Costando i primi lir. 7 al metro, e lir. 5 i secondi, ed il loro importo dovendo essere di lir. 1200 avremo la seguente

Equazione del Problema

$$7x + 5y = 1200$$

Soluzione

1.° Si sottragga $5y$, e si divida per 7 .. $x = \frac{1200-5y}{7} = 171 + \left(\frac{3-5y}{7}\right)$ (π)

2.° Facciasi $\frac{3-5y}{7} = z$. 3.° Si moltiplichi questa equazione per 7. 4.° Si aggiunga $5y$. 5.° Si sottragga $7z$. 6.° Si divida per 5, ordinando per y, e si avrà

$$y = \frac{3-7z}{5} = -z + \left(\frac{3-2z}{5}\right) \qquad (\pi')$$

7.° Facciasi $\frac{3-2z}{5} = u$, e come sopra operando si otterrà

$$z = \frac{3-5u}{2} = 1 - 2u + \left(\frac{1-u}{2}\right) \qquad (\pi'')$$

8.° Facciasi $\frac{1-u}{2} = \omega$, e come sopra operando avrassi finalmente

$$u = 1 - 2\omega \qquad (\pi''')$$

9.° Si sostituisca in (π'') il valore qui trovato per u, e l'altro ω alla sua corrispondente quantità eguale per supposizione. Sarà

$$z = 1 - 2(1 - 2\omega) + \omega = 1 - 2 + 4\omega + \omega = 5\omega - 1$$

10.° Pongasi in (π') questo valore della z, ed all' altra quantità $\frac{3-2z}{5}$, che si è fatta u, si sostituisca il valore di u dato per ω, e si avrà

$$y = -(5\omega - 1) + 1 - 2\omega = -5\omega + 1 + 1 - 2\omega = 2 - 7\omega$$

11.° Nell' equazione (n) sostituita alla frazione la quantità or ora trovata per z, che la rappresenta, si otterrà per ultimo

$$x = 171 + 5\omega - 1 = 170 + 5\omega$$

Le varie soluzioni del problema si avranno dando successivamente ad ω tutti que' valori interi negativi, cominciando dallo zero, che ci lasciano $170 + 5\omega$ una quantità positiva.

Fatta $\omega = 0$ . . . . . $x = 170$; $y = 2$

Fatta $\omega = -1$ . . . . $x = 170 - 5 = 165$; $y = 2 - 7 \times -1 = 2 + 7 = 9$

Fatta $\omega = -34$ . . . $x = 170 - 170 = 0$; $y = 2 - 7 \times -34 = 2 + 238 = 240$

I valori adunque della x dal 170 decresceranno colla differenza 5 sino al 5, e quelli della y dal 2 cresceranno colla differenza 7 sino al 233.

Conclusione.

Dunque tutte le possibili combinazioni saranno le seguenti

Per x . . . 170, 165, 160, 155, 150, 145, 140, 135, 130, ... 15, 10, 5

Per y . . . 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, 58, ... 219, 226, 233

Verificazione

Verificheremo la 2.ª, e la penultima delle combinazioni.

1.ª Met. 165 a lir. 7	lir.	1155	2.ª Met. 10 a lir. 7.	lir.	70
Met. 9 a lir. 5	»	45	Met. 226 a lir. 5	»	1130
Totale debito	lir.	1200	Totale debito	lir.	1200

Problema CXIII.

Con lire cento voglionsi comperare cento uccelli tra passeri, tordi, e fagiani. I passeri costano un soldo ciascuno, una lira i tordi, e cinque lire i fagiani. Quante combinazioni di compera si possono fare.

Raziocinio per le Equazioni

Siano x i fagiani, y i tordi, z i passeri. Sommando questi uccelli ne dobbiamo avere 100. Dunque si avrà la seguente

I.ª Equazione del Problema

$$x + y + z = 100$$

Fagiani x importeranno lire $5x$, perchè ciascuno costa lir. 5, tordi y importeranno lire y, perchè costano una lira ciascuno, e passeri z varranno lire $\frac{z}{20}$, perchè ogni passero costa un soldo, ossia un ventesimo di lira. Ma questi importi debbono formare lir. 100. Dunque si avrà la seguente

II.ª Equazione del Problema

$$5x + y + \frac{z}{20} = 100$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi la 2.ª per 20. 2.° Vi si sottragga la 1.ª 3.° All'equazione residua si levi $99x$. 4.° Si divida per 19, e sarà

$$y = \frac{1900 - 99x}{19}$$

Perchè y sia positiva debb' essere $1900 > 99x$, ossia $x < \frac{1900}{99} < 20$, e perchè sia un numero intero il valore della x dovrà essere un multiplo di 19. Queste due condizioni limitano il numero delle combinazioni per la compera ad una sola. Riterremo pertanto $x = 19$, e quindi

$$y = \frac{1900 - 1881}{19} = \frac{19}{19} = 1$$

5.° Nell'equazione 1.ª sottratte y, ed x, ed a queste quantità sostituito il loro valore già trovato, sarà

$$z = 100 - y - z = 100 - 1 - 19 = 100 - 20 = 80$$

Conclusione

Dunque si potranno comperare 19 fagiani, un tordo, e 80 passeri.

Verificazione

Fagiani N.°	19	a lir. 5 importano	lir.	95
Tordi . . »	1	a lir. 1	»	1
Passeri. . »	80	ad un soldo	»	4
Totale degli uccelli N.°	100	Totale della spesa	lir.	100

Problema CXIV.

I fagiani costano uno scudo ciascuno, mezzo scudo le pernici, ed un duodecimo di scudo le quaglie. Si vogliono comperare 160 di questi volatili, e spendere soltanto 75 scudi. Cercansi le varie combinazioni della compera, che si possono fare.

Raziocinio per le Equazioni

Sia x il numero de' fagiani, y delle pernici, z delle quaglie. Eseguite le due condizioni del problema si otterranno facilmente le seguenti

Equazioni del Problema

$$1.^a \quad x + y + z = 160$$

$$2.^a \quad x + \frac{y}{2} + \frac{z}{12} = 75$$

Soluzione

1.° Pongasi la 1.ª equazione sotto quest' altra forma, cioè

$$x + \frac{2y}{2} + \frac{12z}{12} = 160$$

2.° Vi si sottragga la 2.ª 3.° Si moltiplichi per 12 l'equazione residua. 4.° Sottraggasi $11z$, e si divida per 6, sarà

$$y = \frac{1020 - 11z}{6}$$

Perchè y sia positiva debb'essere $1020 > 11z$, ossia $z < \frac{1020}{11} < 92$. Il massimo numero adunque delle quaglie per questa sola condizione sarebbe 91.

5.° Si moltiplichi per 2 la 2.ª equazione, e si avrà $2x + y + \frac{z}{6} = 150$ (φ)

6.° Si ponga la 1.ª sotto quest'altra forma, cioè $x + y + \frac{6z}{6} = 160$ (φ')

7.° Si sottragga (φ') a (φ). 8.° Quindi si moltiplichi per 6. 9.° Si aggiunga $5z$. 10.° Si divida per 6, e sarà

$$x = \frac{5z - 60}{6}.$$

Perchè x sia positiva debb' essere $5z > 60$, ossia $z > \frac{60}{5} > 12$. Dunque si sono trovati due limiti per z. Essa non può essere minore di 12, nè

maggiore di 92. Ma perchè x sia intera è necessario, che $5z$ sia esattamente divisibile per 6, essendolo già il 60. Dunque tra il 12, ed il 92 ogni valore, che vorrassi dare a z dovrà essere un multiplo di 6. Dunque il suo valore minimo sarà 18, e il massimo 90

Fatta $z = 18$ . . . . . $y = \frac{1020 - 198}{6} = \frac{822}{6} = 137$

$x = \frac{90 - 60}{6} = \frac{30}{6} = 5$

E fatta $z = 24$ . . . . . $y = \frac{1020 - 264}{6} = \frac{756}{6} = 126$

$x = \frac{120 - 60}{6} = \frac{60}{6} = 10$

Dunque i valori della x andranno crescendo colla differenza 5 dal 5 sino al 65; quelli della y dal 137 decresceranno sino al 6 colla differenza 11; e quelli della z cresceranno dal 18 al 90 colla differenza 6

Conclusione

Dunque tutte le combinazioni possibili saranno le seguenti

Per x .	5,	10,	15,	20,	25,	30,	35,	40,	45,	50,	55,	60,	65
Per y .	137,	126,	115,	104,	93,	82,	71,	60,	49,	38,	27,	16,	5
Per z .	18,	24,	30,	36,	42,	48,	54,	60,	66,	72,	78,	84,	90

Verificazione

Verifichiamo la 1.ª di queste combinazioni.

Fagiani N.°	5	ad. uno scudo importeranno . .	Sc. 5
Pernici	« 137	a mezzo scudo	« $68\frac{1}{2}$
Quaglie	« 18	ad un duodecimo di scudo . .	« $1\frac{1}{2}$
Totale de' volatili .	N.° 160	Totale della spesa .	Sc. 75

Problema CXV.

Trenta persone tra uomini, donne, e fanciulli hanno pranzato all'osteria, ed hanno speso lir. 50. Ogni uomo ha speso lir. 3; ogni donna lir. 2; ogni fanciullo lir. 1. Quanti uomini, quante donne, e quanti fanciulli vi potevano essere.

Raziocinio per le Equazioni

Sia x il numero degli uomini, y quello delle donne, z quello de' fanciulli. La riunione di queste persone deve ascendere a 30. Dunque si avrà la seguente

I.ª Equazione del Problema

$$x + y + z = 30$$

Tutti gli uomini avranno speso $3x$, tutte le donne $2y$, e tutti i fanciulli z. Ma la somma di questi importi debb' essere eguale a lire 50. Dunque si avrà la seguente

II.ª Equazione del Problema

$$3x + 2y + z = 50$$

Soluzione

1.° Si sottragga la 1.ª alla 2.ª 2.° Si sottragga y all' equazione, che ne sorte. 3.° Si divida per 2, e sarà

$$x = \frac{20 - y}{2}$$

Perchè x sia positiva dovrà essere $y < 20$, e perchè sia un intero, il valore della y dovrà essere un multiplo di 2, essendolo già il 20. Dunque il massimo valore della y sarà 18, e 2 il minimo.

Fatta $y = 2$ . . . . . $x = \frac{20 - 2}{2} = \frac{18}{2} = 9$

4.° Nella 1.ª equazione sottraggasi x, ed y, ossia i loro valori corrispondenti qui determinati, e sarà

$$z = 30 - 9 - 2 = 30 - 11 = 19$$

Fatta $y = 4$. . . . . $x = \frac{20 - 4}{2} = \frac{16}{2} = 8$

$$z = 30 - 8 - 4 = 30 - 12 = 18$$

Dunque i valori della x cominceranno dal 9, e decresceranno sino all' unità colla differenza uno; i valori della z dal 19 decresceranno essi pure sino all' 11 colla differenza uno, ed i valori della y, come si è già notato, dal 2 andranno crescendo sino al 18 colla differenza due.

Conclusione

Dunque tutte le combinazioni possibili saranno le seguenti

Per x	9,	8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1
Per y	2,	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16,	18
Per z	19,	18,	17,	16,	15,	14,	13,	12,	11

Verificazione

Si verifichi la quinta di queste combinazioni.

Uomini	N.° 5	a lir. 3. ciascuno, danno.	lir. 15
Donne . .	» 10	a lir. 2.	» 20
Fanciulli .	» 15	a lir. 1.	» 15
Totale delle persone .	N.° 30	Totale della spesa .	lir. 50

Problema CXVI.

Si cerca l'anno dell'Era Cristiana, in cui si ebbe, o si potrà avere susseguentemente 17 di ciclo solare, 6 di ciclo lunare, e 5 d'indizione.

Raziocinio per l'Equazione

È noto, che il ciclo solare è un periodo di 28 anni, il lunare detto anche numero aureo di anni 19, e l'indizione d'anni 15. L'anno cercato si faccia x. Dovrassi prendere questo numero, e dividerlo pel numero degli anni, che costituiscono il periodo. Da questa divisione dee sortire un numero intero d'anni, per esempio y, ed un resto, il quale debb'essere l'indicato dal problema, e che sarà espresso, secondo la teorica della divisione, da un rotto avente per numeratore quell'indicato numero, e per denominatore il denominatore dell'operazione, cioè gli anni del periodo. Sarà quindi $\frac{x}{28} = y + \frac{17}{28}$, ossia $\frac{x-17}{28} = y$. Collo stesso raziocinio si otterranno le altre due equazioni, e per conseguenza si avranno le seguenti

Equazioni del Problema

$$1.^a \quad \frac{x-17}{28} = y$$

$$2.^a \quad \frac{x-6}{19} = z$$

$$3.^a \quad \frac{x-5}{15} = u$$

Soluzione

1.° Si moltiplichi per 28 la 1.ª 2.° Si aggiunga 17, e sarà

$$x = 28y + 17 \qquad (m)$$

3.° Si sostituisca (m) nella 2.ª 4.° Vi si cavino tutti gl' interi possibili. 5.° Si faccia la frazione $\frac{9y + 11}{19} = \omega$. 6.° Si moltiplichi questa equazione per 19. 7.° Si sottragga 11. 8.° Si divida per 9, e si otterrà

$$y = \frac{19\omega - 11}{9} = 2\omega - 1 + \left(\frac{\omega - 2}{9}\right) \qquad (q)$$

9.° Si faccia $\frac{\omega - 2}{9} = \varphi$. 10.° Si moltiplichi questa equazione per 9. 11.° Si aggiunga 2, e sarà

$$\omega = 9\varphi + 2 \qquad (m')$$

12.° Si sostituisca (m') in (q) . . . . . $y = 18\varphi + 4 - 1 + \varphi = 19\varphi + 3$ (m'')

13.° Si sostituisca (m'') in (m) . . . . . $x = 28(19\varphi + 3) + 17 = 532\varphi + 101$ (q')

14.° Pongasi (q') nella 3.ª equazione . . $\frac{532\varphi + 101 - 5}{15} = u$

15.° Riducendo, e cavando gl'interi . . $u = 35\varphi + 6 + \left(\frac{7\varphi + 6}{15}\right)$

16.° Si faccia $\frac{7\varphi + 6}{15} = \lambda$. 17.° Si moltiplichi per 15. 18.° Si sottragga 6. 19.° Si divida per 7, e sarà

$$\varphi = \frac{15\lambda - 6}{7} = 2\lambda + \left(\frac{\lambda - 6}{7}\right) \qquad (n)$$

20.° Facciasi $\frac{\lambda - 6}{7} = e$. 21.° Si moltiplichi per 7. 22.° Si aggiunga 6, e sarà

$$\lambda = 7e + 6$$

23.° Si porti questo valore in (n) . . $\varphi = 14e + 12 + e = 15e + 12$ (n')

24.° Si sostituisca (n') in (q') . . . . $x = 532(15e + 12) + 101 = 7980e + 6485$

Cominciando dallo zero, e proseguendo a supporre $e = 1 = 2 = 3$ . . . . . si avranno le espressioni degli anni, in cui si possono verificare le condizioni del problema. Ma qui bisogna avvertire, che questi anni appartenendo al periodo Giuliano, il cui principio precede di anni 4713 quello dell' Era Cristiana, bisognerà sottrarre 4713 a ciascuna delle differenti epoche, che si troveranno nei valori della x, onde avere degli anni riferiti all' E. C., come vuole il nostro problema.

Fatta $e = 0$ . . . . . $x = 6485$. . . . . $6485 - 4713 = 1772$

Fatta $e = 1$ . . . . . $x = 14465$. . . . . $14465 - 4713 = 9752$

Conclusione

Dunque l'anno, che nella nostra Era dava 16 di ciclo solare, 6 di ciclo lunare, e 5 d'indizione sarà stato il 1772. Questi dati si verificheranno anche nel futuro anno 9752; e così di seguito.

Verificazione

Diviso l'anno 6485 per 28, periodo del ciclo solare, si ha il quoziente esatto 231, e 17 di residuo; diviso 6485 per 19, periodo del ciclo lunare, si ha il quoziente esatto 341, e 6 di residuo; diviso 6485 per 15, periodo dell'indizione, si ha il quoziente esatto 432, e 5 di residuo.

Lo stesso verificherebbesi in qualunque altra supposizione, secondo i diversi valori presi per e.

Problema CXVII.

Si debbono pagare lir. 3285 in doppie di Genova a lir. 105, in sovrani a lir. 45, ed in zecchini a lir. 15. Non si vogliono in tutto, che 75 pezzi. Cercasi in quanti modi si possa eseguire il pagamento.

Raziocinio per le Equazioni

Sia x il numero delle doppie di Genova, y de' sovrani, z degli zecchini. La loro somma debb' essere 75. Dunque si avrà la seguente

I.ª Equazione del Problema

$$x + y + z = 75$$

Dando al numero delle monete il loro rispettivo valor nominale dobbiamo avere una somma di lir. 3285. Dunque avremo la seguente

II.ª Equazione del Problema

$$105x + 45y + 15z = 3285$$

Soluzione

1.° Si divida per 15 la 2.ª 2.° Si sottragga all'equazione, che

n' emerge, la 1.ª 3.° All' equazione residua si sottragga $2y$. 4.° Si divida per 6, e sarà

$$x = \frac{144 - 2y}{6} = 2\left(\frac{72 - y}{3 \cdot 2}\right) = \frac{72 - y}{3}$$

Perchè x sia positiva dovrà essere $y < 72$, e perchè sia un numero intero la y dovrà essere esattamente divisibile per 3, essendolo già il 72. Dunque il massimo valore della y sarà 69, ed il minimo 3.

5.° Fatta $y = 3$ . . . . . $x = \frac{72 - 3}{3} = \frac{69}{3} = 23$

6.° Nella 1.ª equazione sottraggasi x, ed y, e posti i loro valori, sarà

$$z = 75 - x - y = 75 - 3 - 23 = 75 - 26 = 49$$

7.° Fatta $y = 6$ . . . . . $x = \frac{72 - 6}{3} = \frac{66}{3} = 22$

$$z = 75 - x - y = 75 - 22 - 6 = 75 - 28 = 47$$

Dunque i valori della x cominceranno dal 23, e andranno decrescendo colla differenza uno sino all' unità; i valori della y dal 3 cresceranno, come si è detto, colla differenza tre sino al 69; ed i valori della z dal 49 decresceranno sino al 5 colla differenza due.

Conclusione

Dunque tutte le combinazioni possibili saranno le seguenti

Per x. . . 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
Per y. . . 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69
Per z . . . 49, 47, 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 23, 21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5

Verificazione

Si verifichi la penultima di queste combinazioni.

Genov.	N.° 2	a lir. 105	importano	lir.	210
Sovr...	N.° 66	a lir. 45	. . . . .	»	2970
Zecch.	N.° 7	a lir. 15	. . . . .	»	105
Totale dei pezzi .	N.° 75		Totale del pagamento .	lir.	3285

Problema CXVIII.

Trovare tre numeri interi, e positivi tali, che se si moltiplichi il 1.° per 3, il 2.° per 5, ed il 3.° per 7 la somma de' prodotti sia 560; e

se si moltiplichi il 1.° per 9, il 2.° per 25, ed il 3.° per 49 sia 2920 la somma de' prodotti.

Raziocinio per le Equazioni

Sia x il 1.° numero, y il 2.°, z il 3.° Eseguite le moltipliche pei numeri indicate dal problema, ed eguagliando la somma de' rispettivi prodotti alla quantità, cui debb' essere uguale, si avranno le seguenti

Equazioni del Problema

1.ª $3x + 5y + 7z = 560$
2.ª $9x + 25y + 49z = 2920$

Soluzione

1.° Si moltiplichi la 1.ª per 3. 2.° L' equazione, che ne sorte si sottragga alla 2.ª 3.° Si divida per 2 l' equazione residua, e poi si sottragga $14z$. 4.° Si divida per 5, e sarà

$$y = \frac{620 - 14z}{5} = 124 - \frac{14z}{5} \qquad (\varphi)$$

Perchè y sia un numero intero dovrà essere il valore della z esattamente divisibile per 5. 5.° Dietro questa osservazione si faccia $z = 5u$, e chiamisi (π) questa equazione.

6.° Si sostituisca questo valore in (φ), e sarà $y = 124 - 14u$ $\qquad (\varphi')$

7.° Si moltiplichi (φ') per 5, e sarà $5y = 620 - 70u$

8.° Nella 1.ª equazione sostituiscasi a $5y$ il valore qui trovato, ed a $7z$ il valore corrispondente alla fatta supposizione in (π), e si avrà

$$3x + 620 - 70u + 35u = 560$$

9.° E riducendo . . . . $x = \frac{35u - 60}{3} = \frac{35u}{3} - 20$ $\qquad (\varphi'')$

Perchè x sia un numero intero dovrà essere esattamente divisibile per 3. 10.° Facciasi perciò $u = 3t$. 11.° Questo valore si porti in (φ''), in (φ'), ed in (π), e si otterranno le tre equazioni

$$x = 35t - 20 \; ; \; y = 124 - 42t \; ; \; z = 15t$$

A luogo di t, cominciando dall' unità, non possiamo sostituire, che due soli valori, perchè se facessimo $t = 3$ si avrebbe nell' espressione della y un valore negativo.

Fatta pertanto $t = 1$ . . $x = 35 - 20 = 15$; $y = 124 - 42 = 82$; $z = 15$
E fatta. . . . . $t = 2$ . . $x = 70 - 20 = 50$; $y = 124 - 84 = 40$; $z = 30$

Conclusione

Dunque i numeri cercati potranno essere: il 1.°, ed il 3.° 15, ed il 2.° 82; oppure il 1.° 50, il 2.° 40, e 30 il 3.°

Verificazione

I.° Caso

Il 1.° per 3 . . . . . 3 . 15 = 45
Il 2.° per 5 . . . . . 5 . 82 = 410
Il 3.° per 7 . . . . . 7 . 15 = 105
Somma de' prodotti . . . 560

Il 1.° per 9 . . . . . 9 . 15 = 135
Il 2.° per 25 . . . . . 25 . 82 = 2050
Il 3.° per 49 . . . . . 49 . 15 = 735
Somma de' prodotti . . 2920

II.° Caso

Il 1.° per 3 . . . . . 3 . 50 = 150
Il 2.° per 5 . . . . . 5 . 40 = 200
Il 3.° per 7 . . . . . 7 . 30 = 210
Somma de' prodotti . . . 560

Il 1.° per 9 . . . . . 9 . 50 = 450
Il 2.° per 25 . . . . . 25 . 40 = 1000
Il 3.° per 49 . . . . . 49 . 30 = 1470
Somma de' prodotti . . 2920

PROBLEMI INDETERMINATI DI SECONDO GRADO

Problema CXIX.

Un viaggiatore osservando le rarità di una casa illustre s'invaghì di varj quadri di due diverse scuole, e soprattutto d'uno in lavagna, opera antica, ov'è dipinta una Musa. Egli voleva acquistarli, e ne offeriva in prezzo una cassetta di fondo quadro piena di zecchini dispostivi in 144 piani; per cui essendo le pitture di ciascuna scuola tra 80, e 100 avrebbe dato per ogni pezzo tanti zecchini, quanti erano i pezzi della scuola rispettiva, e tanti per la Musa, quanti erano i pezzi delle due scuole mol-

tiplicati insieme. Determinare quante erano, e quanto sarebbero importate le pitture di ciascuna scuola, quanto veniva a pagarsi la Musa, quanti zecchini si trovavano in ciascun piano della cassetta, e quale era il loro numero totale.

Raziocinio per l'Equazione

Sia z^2 il numero degli zecchini di ciascun piano, essendo la cassetta di fondo quadrato. Il numero totale degli zecchini sarà $144z^2$. Si chiami x il numero de' quadri della 1.ª scuola, ed y quello de' quadri della 2.ª Il prezzo de' quadri della 1.ª sarà $x.x$, ossia x^2; quello de' quadri della 2.ª $y.y$, ossia y^2; e quello della Musa xy. Ora tutti questi prezzi parziali de' quadri, e della Musa sommati fra loro debbono eguagliare il numero degli zecchini contenuti nella cassetta. Dunque avrassi la seguente

Equazione del Problema

$$144z^2 = x^2 + xy + y^2$$

Soluzione

1.° Si estragga la radice, e preso il solo segno superiore sarà

$$12z = \sqrt{(x^2 + xy + y^2)} \qquad (M)$$

Quantunque questa equazione sembri impossibile a risolversi, perchè non contenente alcun termine cognito, pure, avuto riguardo a tre condizioni espresse nel problema, non solo si scioglie, ma i valori della x, y, z diventano semplicemente determinati per una sola soluzione. Queste tre condizioni sono: 1.° che la quantità $x^2 + xy + y^2$ debba essere un quadrato perfetto; 2.° che i valori delle tre incognite x, y, z debbano essere interi, e positivi; 3.° che i valori delle due incognite x, ed y debbano essere contenuti tra 80, e 100. Ciò posto; cominciamo ad assegnare un valor tale all'incognita x, che possa estrarsi la radice esatta da $x^2 + xy + y^2$.

2.° Facciasi a tale oggetto $\sqrt{(x^2 + xy + y^2)} = x + \frac{my}{n}$

3.° Si quadri . . . . . $x^2 + xy + y^2 = x^2 + \frac{2mxy}{n} + \frac{m^2y^2}{n^2}$

4.° Riducendo. . . . . $xy + y^2 = \frac{2mxy}{n} + \frac{m^2y^2}{n^2}$

5.° Dividendo per y . . . . $x+y=\frac{2mx}{n}+\frac{m^2y}{n^2}$

6.° Si sottragga x, ed $\frac{m^2y}{n^2}$. 7.° Si ordini per x, e sviluppati i due membri ne' loro rispettivi fattori sarà

$$\left(\frac{2m}{n}-1\right)x=\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)y$$

8.° Si moltiplichi per n^2. 9.° Quindi si divida pel coefficiente della x, e sarà

$$x=y\left(\frac{n^2-m^2}{2mn-n^2}\right)$$

In questa equazione possiamo prendere per n, e per m qualunque numero, e sostituita questa quantità all'espressione $\sqrt{(x^2+xy+y^2)}$, essa verrà ridotta ad un quadrato perfetto. La stessa equazione stabilisce la relazione, che passa tra x, ed y, e data y con essa trovasi immediatamente la x. Questa relazione però può variare al variare de' valori di n, ed m; ma ove si rifletta, che x, ed y debbono contenersi fra' limiti 80, e 100, quando anche una incognita fosse 80, e l'altra 100, il loro rapporto sarebbe :: 80 : 100 :: 4 : 5; e perciò una di esse non potrà essere maggiore di $\frac{5}{4}$, nè minore di $\frac{4}{5}$ dell'altra. Questa osservazione determina esattamente la relazione.

10.° Sia quindi $n=6$; $m=5$, ed avrassi

$$x=y\left(\frac{36-25}{60-36}\right)=\frac{11y}{24}$$

Ma x non può essere per la fatta riflessione $\frac{11}{24}$ della y. Dunque questo valore per x sarà troppo piccolo.

11.° Si faccia invece $n=6$; $m=4$, e sarà

$$x=y\left(\frac{36-16}{48-36}\right)=\frac{20y}{12}=\frac{5y}{3}$$

Questo valore per la stessa ragione non vale, perchè esorbitante.

12.° Sia $n=6$; $m=4\frac{1}{2}$, ch'è un valore medio ai due già presi, e si otterrà

$$x=y\left(\frac{36-20\frac{1}{4}}{54-36}\right)=\frac{15\frac{3}{4}y}{18}=\frac{63y}{72}=\frac{7y}{8}$$

13.° Adottando questo rapporto fra x, ed y, si sostituisca ad x il valore qui determinato nell' equazione (M), e si avrà

$$12z = \sqrt{\left(\frac{49y^2}{64} + \frac{7y^2}{8} + y^2\right)} = \sqrt{\left(\left(\frac{49 + 56 + 64}{64}\right)y^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{169y^2}{64}\right)} = \frac{13y}{8}$$

14.° Dividendo per 12 si otterrà . . . . $z = \frac{13y}{96}$

Dovendo z essere un numero intero bisognerà dare ad y un valor tale, che moltiplicato per 13 sia esattamente divisibile per 96. Ma il valore della y debb' essere tra 80, e 100. Dunque il solo 96 varrà pel nostro caso.

15.° Si faccia dunque. . . $y = 96$, e sarà $z = \frac{13 \cdot 96}{96} = 13$; $x = \frac{7 \cdot 96}{8} = \frac{672}{8} = 84$

Conclusione

Dunque il prezzo delle pitture della 1.ª scuola era di zecchini 84 per ogni quadro, ed i quadri erano 84; il prezzo d' ogni quadro della 2.ª scuola era di zecchini 96, ed i quadri erano 96; la Musa costava zecchini 96×84, ossia 8064; in ciascun piano eranvi zecchini 169, ed il totale degli zecchini contenuti nella cassetta era 24336

Verificazione

1.° Prezzo de' quadri della 1.ª scuola	$84 \cdot 84 = 7056$
Prezzo di quelli della 2.ª	$96 \cdot 96 = 9216$
Prezzo della Musa	$84 \cdot 96 = 8064$
Totale degli zecchini esistenti nella cassetta	24336

2.° Il totale degli zecchini 24336 diviso per 144, ch'è il numero dei piani, dà 169, cioè il numero degli zecchini posto in ciascun piano.

3.° I quadri della 1.ª scuola essendo 84, e que' della 2.ª 96 si verifica, che stanno fra i limiti 80, e 100 in ambedue le scuole.

4.° Finalmente per x, ed y abbiamo trovato due valori tali, che tolto un rettangolo dal loro quadrato (espresso dall' xy, che nella equazione del problema manca per avere una quantità anche alla semplice ispezione da riconoscersi per quadrata), la quantità, che ci resta è ancora un quadrato. Infatti: la quantità residua, che nel caso nostro è 24336 dà realmente un quadrato perfetto, avente 156 per radice.

Problema CXX.

Trovare due numeri, che abbiano la somma, o la differenza de' loro quadrati eguale ad un quadrato.

Raziocinio per la Soluzione

Per evitare ne' cercati numeri le quantità irrazionali bisogna denominarli in modo, che la somma de' loro quadrati sia realmente un quadrato perfetto. Chiamisi perciò uno dei due numeri $m^2 - n^2$, e l'altro $2mn$. Sebbene ciascuno di questi due numeri involga le due incognite m, n, pure essendo comuni ad ambedue, e solo diversamente modificate, il numero delle incognite non sarà, che due, come due sono i numeri cercati.

Soluzione

1.° Si quadri la 1.ª formola. 2.° Si quadri la 2.ª 3.° Si sommino questi due quadrati. 4.° Si estragga la radice dalla somma, che ne sorte, e si avrà $m^2 + n^2$.

Conclusione

Ad m, e ad n diansi que' valori, che noi vogliamo, e tenute le formole superiormente stabilite nel raziocinio per la soluzione si troveranno essere i quadrati dei due numeri tra loro sommati eguali ad un quadrato.

Applicazione

Sia $m = 3$; $n = 2$. Il 1.° numero sarà $m^2 - n^2 = 9 - 4 = 5$. Ed il 2.° $2mn = 2 . 3 . 2 = 12$

Conclusione

Dunque 5, e 12 saranno i due numeri cercati.

Verificazione

Il quadrato di 12 è 144. Quello di 5 è 25. Dalla loro somma si ha 169, ch' è un quadrato perfetto, la cui radice è 13. Questa radice

è la rappresentata da m^2+n^2, che si è trovata nella soluzione, e che nella nostra supposizione è precisamente $9+4=13$

Osservazione

Se volessimo invece la differenza dei quadrati de' numeri eguale ad un quadrato, allora il 1.° numero si farebbe m^2+n^2, e si terrebbe il 2.° $2mn$. Fatti i quadrati delle due formole si dovrebbe sottrarre il quadrato della 2.ª a quello della prima.

Problema CXXI.

Trovare due numeri, che abbiano la somma, o la differenza de' loro quadrati eguale ad un quadrato dato.

Raziocinio per la Soluzione

Sia a^2 il dato quadrato. Anche in questo problema per togliere i numeri irrazionali conviene determinare le incognite con un particolare raziocinio, onde uno dei due numeri venga rappresentato dalla formola $a\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)$, e l'altro da $\frac{2mna}{m^2+n^2}$

Soluzione

1.° Si quadri il 1.° numero. 2.° Si quadri il 2.° 3.° Si sommino questi due quadrati, e si avrà per conclusione, e verificazione insieme del problema

$$a^2\left(\frac{m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2}{m^4+2m^2n^2+n^4}\right)=\left(\frac{m^4+2m^2n^2+n^4}{m^4+2m^2n^2+n^4}\right)a^2=a^2$$

Applicazione

I due quadrati debbano essere eguali al quadrato 49. Avrassi $a=7$. Facciasi $m=3$; $n=2$, e si avrà

1.° Numero . . . . . $7\left(\frac{9-4}{9+4}\right)=\frac{7.5}{13}=\frac{35}{13}$

2.° Numero . . . . . $\frac{2.3.2.7}{9+4}=\frac{84}{13}$

Conclusione

Dunque i due numeri chiesti saranno le frazioni $\frac{35}{13}$, e $\frac{84}{13}$

Verificazione

Il quadrato del 1.° è $\frac{25 \cdot 7^2}{169}$. Del 2.° $\frac{144 \cdot 7^2}{169}$. Sommandoli avremo $\left(\frac{25 + 144}{169}\right) 7^2 = \left(\frac{169}{169}\right) 7^2 = 7^2 = 49$, come doveasi verificare.

Osservazione

Se volessimo, che la differenza dei due quadrati fosse eguale ad un dato quadrato, allora si assumerebbe pel 1.° numero la formola $a\left(\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}\right)$, e si terrebbe pel 2.° la stessa formola. Fatti i loro quadrati si dovrebbe sottrarre il quadrato del 2.° a quello del primo.

Problema CXXII.

Con una equazione indeterminata di 2.° grado descrivere l' andamento del Cerchio.

Raziocinio per l' Equazione

Assumiamo una retta qualunque per diametro, e chiamiamola $2r$. Questa retta si supponga divisa in un punto qualsivoglia. Per quello, che si dimostra in Geometria (Vedi cit. Elem. pag. 34. N.° 120. Geom.) avremo il rettangolo de' segmenti fatti sul diametro (che sono poi le ascisse della curva) eguale al quadrato della perpendicolare condotta dal punto del segmento alla periferia (la quale perpendicolare è l'ordinata della curva). Chiamato pertanto x uno de' segmenti, ossia un' ascissa, l' altra ascissa sarà $2r - x$, e fatta y l' ordinata, si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$y^2 = x(2r - x).$$

Soluzione

1.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 2.° Si estragga la radice, e sarà

$$y = \pm\sqrt{(2rx - x^2)} \qquad (\varphi)$$

Conclusione

Analizzando questa formola (φ) noi determineremo l'andamento della curva circolare.

Determinazione della Curva

L'ordinata y essendo eguale alla quantità $\pm\sqrt{(2rx - x^2)}$ ci fa conoscere, che ha due valori uno positivo, e l'altro negativo, tra loro eguali. Questo prova, che se noi condurremo in senso contrario alla prima ordinata nel cerchio una seconda dalla parte opposta, riescirà questa eguale alla prima, onde l'estremo delle due ordinate, che possono partire da ciascun punto della linea delle ascisse, determinando il ramo della curva, il cerchio terrà lo stesso andamento nella parte superiore, e nella inferiore al diametro.

Supponiamo $x = 0$. È chiaro dall'equazione (φ), che anche y sarà zero. Dunque all'estremità del diametro, dove l'ascissa x è realmente eguale a zero, anche l'ordinata sarà zero. Dunque la curva determinata dai punti estremi delle ordinate taglia il diametro in una delle sue estremità.

Sia $x = 2r$. Moltiplicata per x questa equazione sarà $x^2 = 2rx$, e quindi $2rx - x^2 = 0$. Ma questo è il valore della y. Dunque anche in questo caso sarà $y = 0$. Dunque quando da zero crescerà l'ascissa dall'altra parte in modo, che finalmente venga a formare tutto il diametro, l'ordinata svanirà, e per conseguenza la curva circolare taglierà il diametro anche nell'altra estremità.

Sia $x = r$. Allora sarà $y = \pm\sqrt{(2r^2 - r^2)} = \pm\sqrt{r^2} = \pm r$. Dunque preso il principio delle ascisse nel centro, ossia, ch'è poi lo stesso, presa l'ascissa eguale al raggio, anche l'ordinata, che vi corrisponde è uguale al raggio, tanto al disopra, quanto al disotto del diametro.

Assegnando alla x entro i limiti di zero, e di $2r$ diversi valori, cioè maggiori di zero, e minori di $2r$ noi potremo determinare la lun-

ghezza di tante ordinate, quante si vogliono, e descrivere così per mezzo d'infiniti punti l'andamento intero della curva circolare.

Che se faremo $x > 2r$, moltiplicando per x si avrà $x^2 > 2rx$, onde il valore della y nell'equazione (φ) sarebbe un negativo sotto radicale quadrato, e per conseguenza un immaginario. Lo stesso avverrebbe, se prendessimo x negativa, cioè nella direzione opposta a quella, che si è da noi assunta. Questi due immaginarj ci fanno chiaramente comprendere, che la curva circolare non può estendersi nè al di quà, nè al di là del suo diametro, e che rientra in se stessa.

Problema CXXIII.

Con una equazione indeterminata del 2.° grado descrivere l'andamento della Parabola Apolloniana.

Raziocinio per l'Equazione

La proprietà caratteristica della Parabola Apolloniana, che si dimostra nel trattato delle curve del 2.° ordine, è questa; che il quadrato dell'ordinata eguaglia la corrispondente ascissa moltiplicata in una quantità costante, la quale è detta parametro. Chiamata pertanto y un'ordinata qualunque, x la corrispondente sua ascissa, e p il parametro, avremo la seguente

Equazione del Problema

$$y^2 = px$$

Soluzione

Si estragga la radice, e si avrà $y = \pm\sqrt{px}$ (φ')

Conclusione

Analizzando la formola (φ') otterremo l'andamento richiesto della curva parabolica.

Dal doppio segno, di cui è affetto il valore della y noi cominciamo a vedere, che ad ogni valore dell' ascissa abbiamo due valori eguali dell'ordinata corrispondente; ma l'uno positivo, e l'altro negativo. Questo indica, che la parabola ha due rami, che stendonsi egualmente a destra, ed a sinistra, e che per conseguenza la linea delle ascisse, (ch' è poi lo stesso diametro della curva) taglia per metà l' area parabolica.

E siccome finchè la x è una quantità positiva sarà sempre l'espressione $\sqrt{px}$ un valor reale, così anche y sarà sempre un valor reale; onde noi potremo prolungare la linea delle ascisse nel medesimo senso sino all' infinito, che le ordinate a ciascuna ascissa corrispondenti tanto positive, quanto negative avranno sempre un valor reale. Da qui si deduce, che i due rami parabolici determinati dai punti estremi delle ordinate stendonsi di loro natura indeterminatamente, e si perdono nell'infinito.

Non possono però estendersi le ascisse nella parte opposta al primo andamento della curva, perchè allora si dovrebbe prendere la x negativa, e si avrebbe in (φ') un valore immaginario; onde la curva avrà due soli rami.

E poichè ad eguaglianza di ascisse tanto sarà maggiore il valor delle ordinate, quanto maggiore sarà il valor di p, come appare dall' equazione (φ'); così al crescere, od al diminuire del parametro i rami parabolici si allargheranno, o si restringeranno più, o meno. Ma noi in diverse parabole possiamo variare il parametro indeterminatamente. Dunque le parabole Apolloniane possono essere costruite di ampiezze indefinitivamente diverse.

PROBLEMA CXXIV.

Con una equazione indeterminata del 2.° grado descrivere l' andamento dell' Ellisse.

RAZIOCINIO PER L' EQUAZIONE

La proprietà caratteristica dell' ellisse, che dimostrasi nel trattato delle curve del 2.° ordine, è questa; che se sulla linea delle ascisse

si condurrà un' ordinata alla periferia della curva, sarà il quadrato di essa ordinata una quarta proporzionale dopo il quadrato dell' asse primario, dopo quello dell' asse secondario, e dopo il rettangolo delle ascisse corrispondenti prese dai vertici. Chiamato adunque a l' asse trasverso, o primario, e b l' asse conjugato, o secondario, y l'ordinata, x uno dei segmenti, ossia un' ascissa, l'altro segmento, ossia l'altra ascissa sarà $a-x$, ed avremo la proporzione

$$a^2 : b^2 :: (a-x)\,x : y^2$$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$a^2y^2 = b^2(ax - x^2)$$

Soluzione

1.° Si divida per a^2. 2.° Si estragga la radice, e sarà

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(ax - x^2)} \qquad (m)$$

Conclusione

Analizzando la formola (m) determinerassi l'andamento della curva ellitica.

Determinazione della Curva

Nell' equazione (m) abbiamo due valori per l' ordinata y tra loro eguali, uno positivo, e l'altro negativo. Questo indica, che la curva ellitica si stenderà egualmente al disopra, ed al disotto dell' asse.

Fatta $x = 0$, oppure $a = 0$, riesce sempre $y = 0$. Dunque l'ellisse taglia l' asse trasverso in una delle sue estremità nella 1.ª supposizione, e nell' altra lo taglia nella 2.ª

Fatta $x = \frac{a}{2}$ riesce $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}\right)} = \pm \frac{b}{a} \times \frac{a}{2} = \pm \frac{b}{2}$

Dunque la curva passa pure per le due estremità di b asse conjugato, presa l' ascissa eguale al semiasse trasverso.

Fatta $x > a$, oppure presa x negativamente la quantità $ax - x^2$ è negativa, onde in (m) abbiamo per y un immaginario. Dunque l' ellisse non

estenderassi nè al di quà, nè al di là dell' asse trasverso. Sarà dunque una curva rientrante in se stessa, ed avente due rami eguali uno superiore, l' altro inferiore all' asse trasverso, e due rami eguali uno superiore, l' altro inferiore anche all' asse conjugato.

Finalmente supposto $a = b$ si avrebbe $y = \pm \sqrt{(ax - x^2)}$, equazione spettante al cerchio, in cui a fa le funzioni del diametro $2r$ (Vedi il problema 122.°). Dunque l' ellisse sarebbe equilatera, cioè ridurrebbesi ad essere un cerchio nella supposizione, che il diametro trasverso eguagliasse il conjugato.

Problema CXXV.

Con una equazione indeterminata di 2.° grado descrivere l' andamento della Iperbola riferita all' asse.

Raziocinio per l' Equazione

Prendasi la fig.ª 78.ª tav. 5.ª, e siano AB, RD due rette ortogonali, che si tagliano per metà nel punto C. Si chiami $AB = a$, $RD = b$. Si prolunghi AB in O, e dal punto O si alzi la normale OS. Sia $BO = x$ l' ascissa, ed $OS = y$ l' ordinata. Ora è proprietà caratteristica dell' iperbola, che dimostrasi nel trattato delle curve del 2.° ordine, stare il quadrato dell' asse primario a al quadrato dell' asse secondario b come il rettangolo formato dall' ascissa più l' asse primario nell' ascissa istessa sta al quadrato dell' ordinata. Dunque si avrà la proporzione

$$a^2 : b^2 :: (a + x)x : y^2$$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$a^2 y^2 = b^2 (ax + x^2)$$

Soluzione

1.° Si divida per a^2. 2.° Si estragga la radice, e sarà

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(ax + x^2)} \qquad (m')$$

Conclusione

Analizzando la formola (m') otterremo l'andamento della curva iperbolica riferita all'asse.

Determinazione della Curva

L' ordinata y ha due valori eguali uno positivo, e l'altro negativo. Al punto O corrisponderanno perciò due ordinate eguali l'una in direzione opposta all'altra. Dunque in direzione opposta di OS prendendo $Os = OS$, anche il punto s sarà nella curva. Lo stesso dicasi per qualsivoglia punto m, che si prenda sull'ascissa BO. Dunque l'iperbola stenderassi con rami eguali tanto dall' una, quanto dall' altra parte dell' asse.

Il radicale sotto cui è involto il valore della y non contenendo quantità negative, è chiaro, che il valore della x non sarà ristretto da limite alcuno. Dunque potrassi prolungare BO sino all' infinito, nel qual caso ambedue i rami iperbolici si stenderanno essi pure all' infinito.

E poichè al crescere della x cresce anche y, i rami dell' iperbola in proporzione del suo maggior allontanamento andranno sempre più scostandosi dall' asse.

Fatta $x = 0$ riesce pure $y = 0$. Dunque l'iperbola taglia la retta AB, cioè il diametro trasverso nella sua estremità B.

Ma se a luogo di prendere la x da B in O prenderassi in senso opposto da B in O', allora x sarà negativa, e si avrebbe $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(-ax + x^2)}$. Questo valore è immaginario, finchè sia $a > x$. Dunque a nessuno de' punti sul diametro AB può corrispondere un valore dell' ordinata y, ossia, ch' è poscia lo stesso, a nessuno di questi punti può corrispondere la curva iperbolica. Ma quando sarà $a < x$ allora la quantità $-ax + x^2$ sarà positiva, e quindi il valore della y reale; e conseguentemente a ciascun punto di AO', prolungata sino all'infinito, corrisponderanno due altre ordinate eguali l'una positiva, e l'altra negativa. Nasce adunque all'altra estremità del diametro sulle ascisse negative un' altra iperbola, che con altri due rami stendesi all' infinito, come quella, ch' è formata sulle ascisse positive, e gode delle medesime proprietà.

Dunque l'iperbola riferita all'asse potrà ritenersi formata da quattro rami infiniti due positivi, e due negativi.

PROBLEMI ESPONENZIALI, E LOGARITMICI

Problema CXXVI.

Si è impiegato un capitale a all' interesse composto $\frac{m}{n}$. Si vuol sapere in quanti anni diventerà $r.^{plo}$

Raziocinio per l' Equazione

Sia x questo numero. Cerchiamo dapprima la legge, con cui cresce il capitale per gl' interessi composti. Il capitale essendo a, l' interesse annuo $\frac{m}{n}$, avremo pel 1.° anno la proporzione

$$1 : \frac{m}{n} :: a : 4^{to} = \frac{am}{n}$$

Sarà dunque $\frac{am}{n}$ l' interesse da aggiugnersi al capitale, ond' esso alla fine del 1.° anno diventerà

$$a + \frac{am}{n} = \frac{an + am}{n} = a\left(\frac{m+n}{n}\right)$$

Similmente l' interesse pel 2.° anno si avrà dalla proporzione

$$1 : \frac{m}{n} :: a\left(\frac{m+n}{n}\right) : 4^{to} = \frac{am}{n}\left(\frac{m+n}{n}\right)$$

Dunque il capitale alla fine del 2.° anno sarà espresso dalla formola

$$a\left(\frac{m+n}{n}\right) + \frac{am}{n}\left(\frac{m+n}{n}\right) = a\left(\frac{m+n}{n}\right)^2$$

Collo stesso andamento si troverebbe, che il capitale dopo il 3.° anno sarà $a\left(\frac{m+n}{n}\right)^3$, e dopo anni x diventerà $a\left(\frac{m+n}{n}\right)^x$. Ma dopo questo intervallo d' anni il capitale debb'essere ra. Dunque avremo la seguente

Equazione del Problema

$$a\left(\frac{m+n}{n}\right)^x = ra$$

Soluzione

1.° Si divida per a. 2.° Si moltiplichi per n^x, e si avrà

$$(m+n)^x = rn^x$$

3.° Si passi ai logaritmi, e si avrà (Vedi cit. Elem. pag. 92).

$$x\,Log.\,(m+n) = Log.\,r + x\,Log.\,n$$

4.° Sottraggasi $x\,Log.\,n$. 5.° Si ponga la x sotto i suoi fattori. 6.° Si divida pel coefficiente della x, che n' emerge, e sarà

$$x = \frac{Log.\,r}{Log.\,(m+n) - Log.\,n} \qquad (A)$$

Conclusione

Questa formola (A) rappresenterà il numero degli anni, che debbono scorrere, perchè il capitale al dato interesse composto diventi $r.^{plo}$

Applicazione

Sia il capitale all'interesse composto del 5 per 100, e cerchinsi gli anni, dopo i quali il detto capitale possa essere triplicato. Avremo

$$m = 5\ ;\ n = 100\ ;\ r = 3$$

Dunque sarà $x = \frac{Log.\,3}{Log.\,105 - Log.\,100} = \frac{0,47712}{2,02118 - 2,00000} = \frac{0,47712}{0,02118} = 22,52$ pross.°

Conclusione

Dunque in poco più d'anni $22\frac{1}{2}$ si triplicherà il capitale impiegato all'interesse composto del 5 per 100.

Problema CXXVII.

In un regno cresce la popolazione in ciascun anno d'una parte $p.^{esima}$ Si cerca il numero degli anni, che dovranno scorrere, affinchè la popolazione presente stia a quella di un dato ultimo anno nella ragione di $1 : m$.

Raziocinio per l'Equazione

Chiamisi a la popolazione presente. Alla fine del 1.° anno per condizione del problema diventerà

$$a + \frac{a}{p} = \frac{ap + a}{p} = a\left(\frac{p+1}{p}\right)$$

Alla fine del 2.°

$$a\left(\frac{p+1}{p}\right)+\frac{a}{p}\left(\frac{p+1}{p}\right)=\frac{ap+a}{p}+\frac{ap+a}{p^2}=\frac{ap^2+ap+ap+a}{p^2}=a\left(\frac{p^2+2p+1}{p^2}\right)=a\left(\frac{p+1}{p}\right)^2$$

Collo stesso andamento dopo anni 3 sarà $a\left(\frac{p+1}{p}\right)^3$, e dopo anni x, numero d'anni, che supponiamo necessario, perchè la popolazione presente stia a quella di un dato ultimo anno $::1:m$, sarà $a\left(\frac{p+1}{p}\right)^x$; onde avrassi la proporzione

$$a : a\left(\frac{p+1}{p}\right)^x :: 1 : m$$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj si otterrà la seguente

Equazione del Problema

$$a\left(\frac{p+1}{p}\right)^x = ma$$

Soluzione

Sciolta questa equazione, come si è fatto col problema antecedente sarà

$$x = \frac{Log.\, m}{Log.\,(p+1) - Log.\, p} \qquad (B)$$

Conclusione

La formola (B) esprimerà il numero degli anni, che dovranno scorrere dal presente ad un determinato ultimo anno, perchè la popolazione presente, che in ogni anno cresce della parte $p.^{esima}$ stia a quella dell'ultim' anno nella ragione di $1 : m$.

Facilmente si vede in qual maniera questo problema possa essere applicato a' casi particolari, come si è fatto col precedente.

Problema CXXVIII.

Da una botte di vino, che conteneva pinte a, si levano b pinte ogni giorno, e vi si rimette altrettanto d'acqua. Dopo estrazioni n quanto vino vi resterà.

Raziocinio per l'Equazione

Sia x il vino residuo dopo le estrazioni n. Dopo la 1.ª estrazione avremo il residuo di vino $a-b$. Per avere il residuo dopo la 2.ª bisogna instituire la proporzione

$$a : b :: a-b : 4.^{to} = \frac{b}{a}(a-b)$$

La quantità $\frac{b}{a}(a-b)$ esprimerà il vino levato nella 2.ª estrazione. Dunque il residuo sarà

$$a-b-\frac{b}{a}(a-b) = \frac{a^2-ab-ab+b^2}{a} = \frac{a^2-2ab+b^2}{a} = \frac{(a-b)^2}{a}$$

Collo stesso raziocinio il vino residuo dopo la 3.ª sarà $\frac{(a-b)^3}{a^2}$. E dopo estrazioni n il vino residuo sarà $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$. Ma questo vino per supposizione debb'essere x. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$x = \frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$$

Soluzione

Si passi ai logaritmi, e sarà $Log.x = n\,Log.(a-b) - (n-1)Log.a$ (C)

Conclusione

Dalla formola (C) cercando sulle tavole logaritmiche i numeri corrispondenti alle espressioni cognite si avrà il numero delle pinte di vino residuo nella botte dopo un determinato numero di estrazioni.

Applicazione

Supponiamo, che la botte contenesse 100 pinte di vino, che se ne levasse una pinta ogni giorno, e che il numero delle estrazioni fosse 50. Chiedesi il vino residuo. Avremo

$$a = 100\ ;\ b = 1\ ;\ n = 50$$

Dunque . . . . . $Log. x = 50. Log. 99 - 49. Log. 100$
Sostituiti i valori corrispondenti a questi logaritmi si otterrà

$$Log. x = 99,78150 - 98,00000 = 1,78150$$

Ma al logaritmo 1,78150 corrisponde prossimamente il numero 60. Dunque dai logaritmi passando ai numeri si potrà assumere $x = 60$

Conclusione

Dunque 60 pinte di vino conterrà ancora la botte.

Problema CXXIX.

Dato il peso, ed il diametro d'una palla da cannone trovare il diametro di un'altra palla, il cui peso è cognito.

Raziocinio per l'Equazione

Sia p il peso della palla, il cui diametro cognito sia a, ed x sia il diametro dell'altra palla, che sappiasi pesare m. Combinando le due cognizioni: 1.ª che le sfere sono proporzionali ai cubi de' loro diametri, come è provato in Geometria; 2.ª che i volumi stanno fra loro in ragione de' pesi, ove i corpi sieno omogenei, come è provato in Fisica; avremo la proporzione $x^3 : a^3 :: m : p$, nella quale fatto il prodotto dei medj, e degli estremi, avrassi la seguente

Equazione del Problema

$$px^3 = ma^3$$

Soluzione

1.° Dividasi per p, e sarà $x^3 = \frac{ma^3}{p}$. 2.° Si passi ai logaritmi, e sarà

$$3. Log. x = Log. m + 3. Log. a - Log. p$$

3.° Si divida per 3 . . . . $Log. x = Log. a + \frac{Log. m - Log. p}{3}$ (M)

Conclusione

Prendendo i valori numerici determinabili dalle diverse applicazioni nella formola (M) si conoscerà immediatamente il diametro cercato.

Applicazione

Vogliasi a cagion di esempio il diametro d'una palla da 24, sapendo quello di una palla da 36 essere Met. 0, 168. Avremo

$$m = 24\ ;\ a = 168\ ;\ p = 36$$

e semplificando i due pesi del calibro, che stanno fra loro :: 2 : 3 si potrà assumere

$$m = 2\ ;\ p = 3$$

Dunque si avrà . . . . . $Log.\, x = Log.\, 168 + \frac{Log.\, 2 - Log.\, 3}{3}$

$$Log.\ x = 2,22531 + \frac{0,30103 - 0,47712}{3} = 2,22531 - \frac{0,17609}{3} = 2,22531 - 0,05869 = 2,16662$$

A questo logaritmo corrisponde prossimamente il numero 146, 76. Dunque si avrà

$$x = 146,76$$

Fatto il trasporto delle cifre per ritenere la quantità $a =$ Met. 0, 168, e non $a = 168$, come si è fatto nell' applicazione per trovarne il corrispondente logaritmo sulle tavole, sarà $x = 0,147$ prossimamente.

Conclusione

Dunque 147 atomi prossimamente sarà lungo il diametro cercato.

Problema CXXX.

Una persona prende a prestito un capitale di lire a all' annuo interesse di lire r per ogni lira, colla condizione di poter rimborsare questo capitale pagando in ciascun anno una somma di lire b. Per quanto tempo dovrà pagarsi quest' annualità, onde estinguere il capitale, e gl' interessi.

Raziocinio per l' Equazione

Se l' interesse è di lire r per ogni lira, l' interesse di lire a pel 1.° anno sarà ra. Dunque alla fine del 1.° anno il debito sarebbe $a + ar$. Ma paga lire b. Dunque si ridurrà ad essere

$$a + ar - b = a(1 + r) - b = a'$$

Similmente alla fine del 2.° anno sarà

$$a' + ra' - b = a'(r + 1) - b = (a(1 + r) - b)(r + 1) - b = a(1 + r)^2 - b(r + 1) - b = a''$$

E per la stessa ragione dopo il 3.° anno il debito sarà

$$a(1+r)^3 - b(1+r)^2 - b(1+r) - b = a'''$$

E dopo anni n .... $a(1+r)^n - b(1+r)^{n-1} - b(1+r)^{n-2} \ldots\ldots - b(1+r) - b$

Ossia . . . . $a(1+r)^n - b\left\{(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} \ldots\ldots + (1+r) + 1\right\}$ (φ)

Ma la quantità, che moltiplica il termine $-b$ è la somma dei termini di una progressione geometrica, il cui primo termine è 1, la ragione $1+r$ ed n il numero dei termini, la qual somma (Vedi cit. Elem. pag. 118.) è nel caso nostro espressa da

$$1\left\{\frac{(1+r)^n - 1}{1+r-1}\right\} = \left\{\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right\}$$

Dunque sostituita questa quantità in (φ) si otterrà il debito dopo anni n

$$a(1+r)^n - b\left\{\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right\}$$

Ma dopo questo numero d'anni per condizione del problema il debito debb' essere zero. Dunque si avrà la seguente

Equazione del Problema

$$a(1+r)^n - b\left\{\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right\} = 0$$

Soluzione

1.° Si pongano sotto un solo fattore le quantità, che hanno un fattor comune. 2.° Si porti nel 2.° membro il termine $-b \times -\frac{1}{r}$, ossia $\frac{b}{r}$, e si avrà

$$\left(a - \frac{b}{r}\right)(1+r)^n = -\frac{b}{r}$$

Ossia . . . . . $\left(\frac{ar-b}{r}\right)(1+r)^n = -\frac{b}{r}$

3.° Si moltiplichi per r. 4.° Si cambino i segni all'equazione, e sarà

$$(b - ra)(1+r)^n = b$$

5.° Si passi ai logaritmi . . . . $Log.(b-ra) + n\,Log.(1+r) = Log.\,b$

6.° Si sottragga il 1.° termine del 1.° membro. 7.° Si divida per $Log.(1+r)$, e otterrassi

$$n = \frac{Log.\,b - Log.(b-ra)}{Log.(1+r)} \qquad (N)$$

Conclusione

La formola (N) darà il numero degli anni, pe' quali dovrà pagarsi l'annualità, onde venga estinto il capitale unitamente a'corrispondenti interessi per ogni anno.

Osservazione

Come si è fatto co' problemi antecedenti si potrebbe agevolmente eseguire qualunque applicazione della formola (N) a' casi particolari.

Fine della Raccolta de' Problemi di Algebra

AVVISO AL LETTORE

Come ho notato alla pag. 59 le mie citazioni degli Elem. d'Algebra e Geometria si riferiscono all'edizione 1.ª Se le vuoi riferite all'ultima, ch'è la 3.ª, non devi far altro, che aggiugnere costantemente 4 unità a ciascun numero indicante la pagina.

La citazione poi posta alla pag. 200 di questa raccolta trasportata all'edizione 3.ª sarebbe (pag. 200. n.° 120. lib. 5.°), perchè la 3.ª edizione ha un numero progressivo comune di pagine per le due parti di Algebra e Geometria, che nella 1.ª erano numerizzate particolarmente.

INDICE DEI PROBLEMI

CONTENUTI IN QUESTO PRIMO TOMO

ALGEBRA

PROBLEMI DI PRIMO GRADO AD UNA SOLA INCOGNITA

I. *Un generale ha un dato numero di cannoni da disporre a* p *ordini in una breccia. Se li mette alla distanza l'uno dall'altro di palmi* a, *gliene sopravanzano* m; *se li pone alla distanza di palmi* b, *gliene mancano* n. *Quanti palmi è lunga la breccia, e quanti cannoni ha il generale alla sua disposizione* . . . . . pag. 1

II. *Un banchiere ha due specie di monete. Abbisognano pezzi* a *della* 1.ª *per formare uno scudo, e pezzi* m *della* 2.ª *per formare similmente uno scudo. Una persona vuole d'ambedue le monete pezzi* c *per formar pure uno scudo. Si domanda quanti pezzi gli darà il banchiere di ciascuna delle due monete.* . . . . . » 3

III. *Due viaggiatori si mettono in cammino; il* 1.° *con lire* a, *ed il* 2.° *con lire* b. *I ladri rubano al* 1.° m *volte quello che rubano al* 2.°, *e allo stesso lasciano* n *volte quello, che lasciano al* 2.° *Quante lire hanno rubato a ciascheduno.* » 5

IV. *Due soldati in un saccheggio si accordano di dividere fra loro il bottino, che farebbero nella ragione di* m : n. *Nel bottino raccolgono scudi* a. *Ma nella divisione si muove lite, e ciascuno prende quello, che può. Pacificatisi in seguito quegli, che tolse di più, restituì la parte* p.^{esima} *di quanto avea tolto, e l'altro restituì la parte* q.^{esima}; *e si divisero la somma deposta nella ragione di* m : n. *Così ebbero le*

loro parti, come avevano pattuito. Si vuol sapere quanti scudi avesse preso ciascun soldato nella zuffa . . . . pag. 6

V. *B cacciatore promette a C una somma* b *per ogni scarica a vuoto, e C promette a B una somma* a *per ogni scarica in pieno. Dopo un numero* n *di scariche i due cacciatori o si debbono niente, o B deve a C una somma* d, *o C la deve a B. Trovare la formola generale esprimente le scariche a vuoto del cacciatore B.* . . . . . » 9

VI. *Con carte numero* a *si fanno monticelli* b *di egual numero* c *di punti, e la prima carta di ciascun monticello in prospetto vale dieci, s'è figura, undici s'è un asso, dodici s'è un due, e così di seguito. Le altre carte al disotto non vagliono che un punto ciascuna. Fatti i monticelli, e rese le carte che sopravanzano, se ve ne sono, chiedesi la formola generale esprimente la somma dei punti, che fanno le carte in prospetto.* . . . . . » 12

VII. *In un testamento si trovò così scritto: se mi nasce un maschio lo instituisco erede in due terzi, e lascio il resto alla madre: e se mi nasce una femmina la chiamo erede in un terzo, e lascio il resto alla madre. Ora nacquero ad un parto un maschio, ed una femmina. Quanto darassi alla madre, al figlio, ed alla figlia, perchè si compia la volontà del testatore.* . . . . . » 13

VIII. *Un servitore avea lire* a, *quando ricevette il salario di* n *mesi. Dopo un numero* m *di mesi aveva già spesa una parte* $\frac{p}{q}$ *del suo denaro, e riscosso il salario degli* m *mesi trovossi con lire* b. *Si domanda quanto avesse al mese.* » 14

IX. *Tre amici B, C, D hanno preso in comune de' viglietti di lotto. Il giuoco di B con quello di C fa lire* a: *quello di B col giuoco di D fa lire* c; *e quello di C col giuoco dello stesso D fa lire* r. *Si cercano le formole generali esprimenti il giuoco di ciascheduno.* . . . . . » 16

X. *Un padre lascia morendo ad alcuni figli un asse, che si dividono in questa maniera. Il* 1.° *riceve lire* a, *e la* m.^{esima} *parte del residuo; il* 2.° *lire* 2a, *e la* m.^{esima} *parte del*

residuo; il 3.° lire 3a, *e la* m.^{esima} *parte del residuo; e così di seguito. Fatte queste divisioni si trova, che l'asse è stato egualmente diviso tra' figli. Quanti erano i figli, quanto ricevette ciascuno, ed a quanto ascendeva l'asse paterno* . . . . . pag. 18

XI. *Vi sono due fontane, una delle quali colle sue acque riempie in ore* m *una data capacità, e l'altra la riempie colle sue separatamente in ore* n. *Quanto tempo impiegheranno a riempirla riunendo le loro acque* . . . . . » 20

XII. *Un negoziante accresce il suo capitale di una parte* m.^{esima} *ogni anno, dopo avere sottratta una somma di lire* a *per le spese occorsegli durante l'anno. Dopo anni* n *il suo capitale trovasi aumentato di lire* b. *Si domanda il* 1.° *capitale* . . . . . » 21

XIII. *Un terremoto abbattè in varie scosse molte case di una città; in una ne rovesciò la* n.^{esima} *parte; in un'altra la* m.^{esima}, *e in tutte le successive la* r.^{esima}, *talchè rimasero solo in piedi case numero* a. *Quante case avea la città innanzi la prima scossa*. . . . . » 24

XIV. *Dati due numeri trovarne un terzo, il quale aggiunto al minore dei dati, e dal maggiore sottratto, abbia il residuo al composto una data ragione qualunque* . . . . . » 25

XV. *L'età di una persona è* m.^{pla} *di quella di un suo figlio. Dopo quanti anni diventerà* n.^{pla} . . . . . » 27

XVI. *Dato un numero qualunque dividerlo in tre parti tali, che l'eccesso del numero medio sul minore sia un dato numero, e sia parimenti un numero dato l'eccesso del maggiore sul medio* . . . . . » 28

XVII. *Domandansi due numeri, il minore de' quali stia al maggiore nella ragione di* m : n, *e il cui prodotto vaglia* q *volte la loro somma* . . . . . » 30

XVIII. *Due pesi l'uno minore di libb.* a, *l'altro maggiore di libb.* b. *sono sospesi all'estremità d'una verga inflessibile, che ha diti* m *di lunghezza. Domandasi qual punto*

della verga dovrebb' essere sostenuto, perchè i due pesi fossero in equilibrio; ossia, ch' è lo stesso, si domanda a quale distanza trovasi questo punto dell' una e dell' altra estremità della verga . . . . . pag. 31

XIX. *Un mercante ha due qualità di vino. Il migliore costa* m *soldi alla pinta, e l' altro ne costa* n. *Mescolando i due vini vuol fare* q *pinte da vendere a soldi* a *la pinta. Come eseguirà la mistura* . . . . . » 33

XX. *Un legatore di libri vende due libri l' uno di fogli* m *per soldi* c, *e l' altro di fogli* n *per soldi* e, *ambedue legati egualmente, e della medesima qualità di carta, e di stampa. Si domanda quanto faccia pagare la legatura* . . . . . » 35

XXI. *Due mobili A, e B distanti tra loro d' un intervallo* d *si muovono sulla stessa linea l' uno incontro all' altro. Il* 1.° *ha V di velocità, e v il* 2.° *Ma il* 1.° *muovesi per un tempo* t *prima del* 2.° *Si cerca il tempo, in cui A incontrerà B, e lo spazio da ambedue i mobili percorso prima d' incontrarsi* . . . . . » 36

XXII. *Un mobile A colla velocità V parte da un dato punto. Un altro B colla velocità* $V+v$ *sulla stessa linea parte dopo un dato tempo* t *da una distanza* d *per raggiugnere A, che gli fugge d' innanzi. Cercasi quando, e dopo quanto spazio lo raggiugnerà* . . . . . » 38

XXIII. *Tizio ha due mucchj di grano, uno scelto composto di moggia* p *gli costa lire* a, *e l' altro costa lire* b *allo stajo. Domanda Tizio quante moggia debba prendere dal mucchio di grano scelto, ed aggiugnervene dell' inferiore, onde ritenuta ancora la misura di moggia* p, *e vendendolo allo stesso prezzo del grano di prima qualità possa ricavare un guadagno* $\frac{m}{n}$ *sul totale della vendita* . . . . . » 42

XXIV. *Tizio impiega un capitale di lire* a *fruttante ogni anno l' interesse* $\frac{m}{n}$ *in modo, che gl' interessi vanno a cumulo in capitale. Dal primo anno, in cui impiega il capitale, è multato dal Sovrano a pagare annualmente una somma tolta dal capitale impiegato, il quale perciò scema, e*

scema anche ne' suoi frutti. Dopo un numero p *d'anni la multa consuma a Tizio e capitale, e frutti. Quale somma paga Tizio al Sovrano annualmente* . . . . . » 45

XXV. *Un podere, il cui valore in contanti è* a *si può acquistare pagando un quinto del prezzo in denaro, e gli altri quattro quinti in carta, mentre questa vale lire* b *per cento. Si domanda qual prezzo debbasi costituire al podere* . » 48

XXVI. *Un viaggiatore fece tre viaggi. Nel* 1.° *moltiplicò per* n *i suoi denari, e spese* q. *Nel* 2.° *guadagnò* $\frac{t}{r}$ *del denaro residuo dopo il* 1.°, *e spese* f. *Nel* 3.° *guadagnò* $\frac{e}{c}$ *sul residuo dopo il* 2.°, *e spese* p. *Alla fine dei tre viaggi trovossi con lire* b. *Con quante lire si pose in cammino pel primo viaggio* . . . . . » 50

XXVII. *Un orefice ha due statue d'oro, ed un solo piedestallo. Il peso della minore è d'once* m, *e col piedestallo pesa l'*n.^{plo} *della maggiore. La maggiore col piedestallo pesa il* q.^{plo} *della minore. Cercasi il peso del piedestallo* . . » 52

XXVIII. *Sforzavasi un sofista di provare, che* 2 + 3 *non fanno* 5 *con questo ragionamento. Io ho comperati de' fiori: una metà l'ho avuta pagando una lira ogni due fiori; e l'altra metà pagando una lira ogni tre fiori Dunque ho pagato due lire ogni cinque fiori; eppure nel rivenderli, ricevendo questo prezzo, io perdo una lira. Donde nasce il sofisma, e quanti fiori aveva comperati il sofista* . . » 54

XXIX. *Un signore manda il suo famiglio ad una vigna, perchè gli porti due pomi. Per andarvi si pagano tre pedaggi. La guardia del* 1.° *esige la metà de' pomi colti, più tre pomi; quella del* 2.° *vuole la metà del residuo, più due pomi; e quella del* 3.° *vuole essa pure la metà del residuo, ed un pomo di più. Conscio il famiglio di questi pesi quanti pomi avrà colti per recarne due al suo padrone* . . . . . » 55

XXX. *Un signore passando per una campagna vide su d'una pianta molti augelletti, e prese a salutarli, dicendo loro:*

addio i miei cento begli augelletti. Ma essi risposero: v'ingannate, o signore, noi non siamo cento. Lo saremmo, quando fossimo due volte tanti quanti pur siamo, più la metà di questo doppio, e quando voi pure foste un augello. Quanti erano . . . . . pag. 56

XXXI. *Una persona interrogata sulla sua età, risponde: se dal triplo degli anni miei si leveranno* 16 *anni, avrassi un numero, che sarà tanto al disopra di* 100, *quanto n' è al disotto la mia età. Quanti anni aveva* . . . . . » 57

XXXII. *Achille va* 1000 *volte più veloce della tartaruga, che lo precede d'una lega. Dove Achille la raggiugnerà* . . . » 58

XXXIII. *Una persona dice d'avere in tasca tante lire, che spendendone tre quarti meno sessanta gliene restano ancora ottanta. Quante lire ha* . . . . . » 59

XXXIV. *Se da una quantità si sottrae la di lei metà, ed uno di più: da quello, che rimane se si sottrae pure la metà, ed uno di più; e di questo residuo se si prende ancora la metà, ed uno di più; e trovasi, che l'ultimo residuo è uguale all'unità, trovare la quantità prima* . . . . . » 60

XXXV. *Diofanto passò nell'adolescenza la sesta parte di sua vita, ed una duodecima nella giovinezza. Si ammogliò, e visse ammogliato la settima parte di sua vita, prima d'avere un figlio, cui sopravisse quattro anni, non avendo vissuto il figlio, che la metà degli anni vissuti dal padre. Quanti anni visse Diofanto* . . . . . » 61

XXXVI. *Si hanno a dividere in tre persone lir.* 420 *per modo, che la parte del* 1.° *stia a quella del* 2.° $:: \frac{1}{3} + \frac{1}{4} : \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$, *e la stessa parte del* 1.° *stia a quella del* 3.° $:: \frac{1}{3} + \frac{1}{4} : \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$. *Quanto toccherà a ciascuno* . . . . . » 62

XXXVII. *Distribuire equabilmente* 21375 *cartocce da fucile a tre distaccamenti, le cui forze sono proporzionali ai numeri* 3. 5. 11 » 64

XXXVIII. *Vi ha un numero composto di due cifre, la cui somma, prese le cifre isolate, è sette: e se al numero totale si aggiugne il ventisette si ottiene un numero composto delle stesse cifre, ma scritte con ordine inverso. Cercasi il numero* . . . . . » 64

XXXIX. *Dividere il* 48 *in* 9 *parti tali, che l'una sia sempre maggiore della sua precedente di un mezzo* . . . . . pag. 65

XL. *Interrogata una persona qual giorno corresse del mese; rispose: la quarta parte dei giorni trascorsi dal principio del mese equivale alla sesta di quelli, che rimangono al suo termine. Qual giorno correva* . . . . . » 66

PROBLEMI DI PRIMO GRADO A PIÙ INCOGNITE

XLI. *Un pezzo di cannone composto di rame, e di stagno pesa denari* m, *e contiene un volume* n *di palmi cubici. Si suppone, che il palmo cubico di rame pesi denari* p, *e che il palmo cubico di stagno ne pesi* q. *In qual modo si può precisare la quantità del rame, e dello stagno, che si ha nel misto* . . . . . » 67

XLII. *Si vuole un metallo, che costi lire* a *all' oncia composto di un metallo, che costi lire* p, *e di un altro, che costi lire* q. *Quanto dell' uno, e dell' altro si dovrà impiegare nel misto* . . . . . » 69

XLIII. *Quanti anni hai tu domanda Tizio a Cajo. Egli risponde:* q *anni sono aveva un' età* m.^{pla} *della tua: dopo anni* q *diventerà* n.^{pla} *Quanti anni avevano ambedue* . . . . . » 71

XLIV. *Un negoziante mette in società l'* n.^{plo} *di un altro, e di più il proprio personale, che per convenzione gli frutta* $\frac{1}{m}$ *sul guadagno totale. Come tra i due socj dividerassi il guadagno* . . . . . » 73

XLV. *Trovare due quantità, di cui sia data la somma, e la differenza* . . . . . » 75

XLVI. *Un orefice comperò un misto d' once* m *d' oro, ed* n *d' argento al prezzo* c; *un' altra volta comperò un misto di once* q *d' oro, e* p *d' argento al prezzo* d. *Si domanda quanto abbia pagato all' oncia l' oro, e l' argento.* . . . » 76

XLVII. *Trovar due numeri tali, che il* 1.° *accresciuto di* a *stia al* 2.° *diminuito di* m *nella ragione di* e : f; *ed il* 2.° *accresciuto di* c *stia al* 1.° *diminuito di* d *nella ragione di* g : h. . . . . » 78

XLVIII. *S'impiegano degli uomini, e delle donne in una data fattura. Un numero* m *d'uomini, ed* n *di donne ricevono lir.* a, *e l'eccesso della paga per* p *uomini sopra la paga corrispondente per* q *donne è lir.* b. *Quanto riceve ciascun uomo, e ciascuna donna* . . . . . pag. 79

XLIX. *Un operajo travaglia un numero* n *di giorni, e nulla spende; rimane ozioso un numero* m *di giorni, e spende sempre una data somma al giorno. Fatti i suoi conti trova di avere guadagnate in questi giorni lir.* a. *Travaglia poi giorni* p, *e nulla spende: sta ozioso giorni* q, *e spende sempre una data somma al giorno. Fatti i suoi conti trova d'aver guadagnate in questi giorni lir.* b. *Quanto spendeva ne' giorni di ozio, e quanto guadagnava ne' giorni di lavoro* . . . . . » 81

L. *S'imprime un'opera sotto una data forma; se si aggiungono* m *linee a ciascuna pagina, ed a ciascuna linea* n *lettere, ciascuna pagina conterrà* p *lettere di più. Ma se si sottraggono* r *linee a ciascuna pagina, ed* e *lettere ad ogni linea, si avranno in ciascuna pagina* d *lettere di meno. Domandasi il numero delle linee di ciascuna pagina, e quello delle lettere di ciascuna linea* . . . . . » 83

LI. *Trovare due numeri, la cui somma sia eguale alla* n.esima *parte del loro prodotto, e che stiano fra loro nella ragione di* p : q. » 85

LII. *A, B, C hanno perduto al giuoco tutto il loro denaro. A, e C hanno perduto lir.* a; *A, e B lir.* b; *B, e C lir.* c. *Quanto ha perduto ciascuno* . . . . . » 87

LIII. *Sono date tre materie. La* 1.ª *costa all'oncia un prezzo* a. *La* 2.ª b. *La* 3.ª d. *Se ne vuole un misto al prezzo* c *per modo, che il peso della* 2.ª *stia a quello della* 3.ª : : m : n. » 88

LIV. *Cercansi tre numeri tali, che il* 1.° *colla parte* m.esima *degli altri due faccia* a; *il* 2.° *colla* n.esima *degli altri due faccia* a'; *e il* 3.° *colla* r.esima *degli altri due faccia* a'' . . . . . » 91

LV. *Le tre cifre d'un numero, se si considerano isolate, sono tali, che il prodotto delle estreme diviso per la media è* 3, *e che la differenza tra le estreme, e la media è* 2.

Sottratto poi 198 *dal numero composto delle tre cifre col loro proprio valore di posizione si ha un resto, ch' è eguale ad un numero composto delle cifre istesse, ma scritte con ordine inverso di posizione* . . . . . pag. 93

LVI. *Un facchino trasporta tre qualità di vasi di porcellana a questo accordo, ch' egli tanto pagherebbe per ogni vaso rotto, quanto riceverebbe per quelli, che portasse intatti della medesima specie. Ora nella* 1.ª *portura ha* 2 *vasi piccoli,* 4 *mezzani, e* 9 *grandi: rompe tutti i mezzani, consegna intatti gli altri, e riceve in pagamento lir.* 28. *Nella* 2.ª *ha* 7 *vasi piccoli,* 3 *mezzani, e* 5 *grandi; consegna sani i piccoli, ed i mezzani, rompe tutti i grandi, e riceve lir.* 3. *Finalmente nella* 3.ª *ha* 9 *vasi piccoli,* 10 *mezzani, ed* 11 *grandi: rompe tutti questi ultimi, consegna tutti gli altri intatti, e riceve lir.* 4. *Si domanda il prezzo del trasporto di ciascun vaso delle tre qualità.* » 94

LVII. *La polvere da cannone è composta di salnitro, di zolfo, e di carbone. La mistura è tale, che sopra libb. cento il triplo del peso del salnitro è uguale a tredici volte quello del carbone, più cinque volte quello dello zolfo; e che cinque volte il peso del salnitro vale trentasette volte il peso dello zolfo, meno sette volte quello del carbone. Con quale proporzione si eseguisce il misto.* . . . . . » 96

LVIII. *Un generale ha tre corpi d' armata. Il* 1.° *è di Francesi, il* 2.° *di Tedeschi, il* 3.° *di Spagnuoli; e vuol dare l' assalto ad una fortezza con uno di questi corpi, promettendo una ricompensa di scudi* 901 *disponibili in questo modo: che ciascun soldato del corpo assalitore riceverà uno scudo, e che il resto verrà egualmente distribuito agli altri due corpi. Ora egli trova, che se i Francesi danno l' assalto, ciascun soldato degli altri corpi riceve un mezzo scudo: se lo danno i Tedeschi, un terzo: se lo danno gli Spagnuoli, un quarto. Quanti soldati conteneva ciascun corpo.* . . . . . » 98

LIX. *Trovare un numero intero determinato composto di quattro cifre tali, che sommando le prime tre (prese sempre*

nel loro valor semplice) venga a formarsi 18; *sommando le prime due colla quarta si abbia* 10; *sommando la prima colle ultime due si ottenga* 19; *e* 10 *novellamente risulti dalla somma delle ultime tre* . . pag. 100

LX. *Vi sono quattro mercanti, che mettono in società un capitale di lir.* a. *Il capitale del* 1.° *più una somma* m *è uguale a quello del* 2.° *meno la stessa somma* m, *a quello del* 3.° *moltiplicato per* m, *ed a quello del* 4.° *diviso per* m. *Quanto ciascun mercante contribuisce al pagamento* . . » 101

LXI. *Quattro navi guerriere hanno tirato in varie zuffe alcuni colpi di cannone. Si sa, che la* 1.ª, *la* 2.ª, *e la* 3.ª *hanno tirato colpi* a: *la* 1.ª, *la* 2.ª, *e la* 4.ª *colpi* m: *la* 1.ª, *la* 3.ª, *e la* 4.ª *colpi* c; *e finalmente la* 2.ª, *la* 3.ª, *e la* 4.ª *colpi* e. *Quanti colpi separatamente ha tirato ciascuna nave.* » 104

LXII. *Vi sono due mandre di pecore, che si lasciano pascolare in due prati, mangiando entro un dato tempo l'erbe, che vi erano al primo istante, e quelle, che successivamente vi crescono nel tempo impiegato pel pascolo, e che vi crescono uniformemente. Si domanda quante pecore vi abbisognerebbero per mangiare, sotto le medesime condizioni, l'erbe di un terzo prato* . . . . . » 105

PROBLEMI DI SECONDO GRADO AD UNA, E PIÙ INCOGNITE

LXIII. *Trovare tre numeri in proporzione continua geometrica, e tali, che la somma dei due primi sia* 10, *e* 24 *sia la differenza dei due ultimi* . . . . . » 109

LXIV. *Trovare due numeri, ne' quali sia data la somma, o la differenza dei quadrati, e in cui sia pur cognito il rapporto, che passa fra loro.* . . . . . » 110

LXV. *Trovar tre numeri, di cui si conoscano i prodotti presi due a due* . . . . . » 113

LXVI. *Cercansi i lati di un rettangolo, la cui superficie sia* p, *e le cui dimensioni sieno nella ragione di* m : n. . . . » 114

LXVII. *Un mercante comperò una quantità di zuccaro per lir.* 600. *Levonne libb.* 150 *per proprio uso, e vendette il rimanente*

per lir. 540, *guadagnando* 10 *centesimi per ogni libbra. Si domanda quante libbra di zuccaro avesse comperato, e quanto lo avesse pagato alla libbra* . . . . . pag. 116

LXVIII. *Tre compagnie d'operaj lavorando insieme farebbero un'opera in* 15 *ore. Ma se lavorassero separatamente i primi impiegherebbero* $\frac{4}{5}$ *del tempo de' secondi, e questi* 15 *ore meno degli ultimi. Quanto tempo impiegherà ciascuna compagnia.* . . . . . » 117

LXIX. *Si è fatto un convito, che costò scudi* a. *Un numero di convitati* m *non avendo pagato, gli altri dovettero pagare scudi* π *di più di quello, che avrebbero sborsato, se tutti avessero contribuito al pagamento. Cercasi il numero dei convitati* . . . . . » 118

LXX. *Un operajo riscuote lir.* a *per mercede dovutagli di un numero di giorni di lavoro eguale alla mercede, che riceve in ciascun giorno. Si cerca quanti giorni abbia lavorato, e quindi quanto guadagnasse al giorno* . . . . . » 120

LXXI. *L'esercito di un generale condotto all'assedio di una città formava un quadrato perfetto: ma per una improvvisa sortita fatta dagli assediati essendo rimaste uccise sul campo* 6 *file intere di un fianco, gli assedianti si ridussero a* 13680 *uomini. Di quanti uomini era composto tutto l'esercito prima della sortita* . . . . . » 121

LXXII. *Con un certo numero di soldati si forma uno squadrone quadrato, ma tolte quattro intere file di fianco, e dispostine i soldati alle spalle, la lunghezza dello squadrone, che ne risulta, sta alla sua larghezza nella ragione di* 9:4. *Cercasi il numero degli uomini componenti lo squadrone* » 122

LXXIII. *Un generale vorrebbe disporre un corpo di truppe in battaglione quadrato, ma nella* 1.ª *disposizione trova di più un numero* φ *di soldati, ed aggiugnendo un uomo a ciascuna fila trova soldati* φ' *di meno. Quanti soldati ha il generale* . . . . . » 124

LXXIV. *I salsiccioni impiegati nel rivestimento d'una batteria possono riguardarsi come cilindri retti. Coi materiali sufficienti per farne* a *d'atomi* b *di diametro se ne vorreb-*

bero fare invece q *della stessa lunghezza. Quale dovrà essere il loro diametro* . . . . . pag. 125

LXXV. *La camera di un mortajo è un cilindro retto. Quella di un mortajo di pollici* 12 (*atomi* 325), *e quella di un mortajo di pollici* 8 (*atomi* 217) *hanno la stessa profondità. Il diametro della* 1.ª *è pollici* 4, *e lin.* 8 (*atomi* 126). *Si domanda quello della* 2.ª, *sapendo di più, che la* 1.ª *camera contiene* 1693 *denari* (*libb.* 3 *once* $7\frac{1}{3}$), *e la* 2.ª *denari* 635 (*once* $20\frac{3}{4}$) . . . . . » 127

LXXVI. *Suppongasi, che l' altezza della scarpa di una batteria sia Met.* 2,274 *nell'interno, e che la base sia Met.* 0,758. *Calcolarne la lunghezza* . . . . . » 128

LXXVII. *Mario attaccò l'esercito de' barbari settentrionali con* 50000 *soldati. I nemici erano composti di Cimbri, di Teutonici, di Sciti, e di Sarmati. I Cimbri formavano la quindicesima parte del loro esercito; i Teutonici erano un tremillesimo del quadrato del numero de' Cimbri, meno precisamente il numero de' Cimbri stessi; gli Sciti erano quanto i Cimbri, ed i Sarmati formavano la nona parte di tutto l'esercito più* 70000 *uomini. Si domanda quanti soldati avesse l'esercito barbaresco, e con quanti barbari doveva affrontarsi ciascun Romano* . . . . . » 129

LXXVIII. *A interrogato da B quante ore fossero, risponde: le ore dopo la mezzanotte stanno al quadrato delle ore avanti mezzodì nella ragione di* m : n. *Quante ore sono* . . . » 131

LXXIX. *Un giuocatore di lir.* 160, *che avea prima di giuocare ne hà perdute alcune; poi avendo guadagnato lir.* 6298 *non solo ricuperò il perduto, ma di più moltiplicò tante volte la perdita, quante erano le lire rimastegli dopo il primo giuoco. Si cerca quanto perdesse nel primo giuoco* » 133

LXXX. *Un mercante comperò un cavallo, che vendette dopo qualche tempo per* 24 *zecchini. In questa vendita egli perdette tanto per cento, quanto il cavallo eragli costato. Si cerca il prezzo del cavallo sborsato dal mercante* . . . » 134

LXXXI. *S' impiegano due operaj, che guadagnano salarj diversi. Il* 1.° *essendo stato pagato al termine di un dato nu-*

mero di giorni ricevette lir. a, *e il* 2.°, *che travagliò giorni* q *di meno ricevette lir.* φ. *S'egli avesse lavorato tutti i giorni come il* 1.°, *e il* 1.° *avesse lavorato giorni* q *di meno, avrebbero ambedue ricevuto la stessa somma. Quanti giorni ciascuno ha travagliato, e quanto ha guadagnato al giorno* . . . . . pag. 135

LXXXII. *Si rimettono ad un banchiere due cambiali sulla medesima persona. La* 1.ª *è di lir.* 550 *pagabile entro* 7 *mesi; la* 2.ª *di lir.* 720 *pagabile entro* 4 *mesi. Egli ricevette per ambedue una somma di lir.* 1200 *esitandole in corso. Si domanda l'annuo interesse, che portavano le due cambiali* » 137

LXXXIII. *Alcuni negozianti stabiliscono un fondo di società affidato ad un agente. Ciascuno di essi contribuisce al fondo tante decine di scudi, quanti sono i socj. Il profitto dell'agente è due volte tanti scudi per* 100, *quanti sono i socj, e se si moltiplica la centesima parte del suo guadagno per* $2\frac{2}{9}$ *si trova il numero de' socj. Cercasi questo numero* . . . . . » 139

LXXXIV. *Due mercanti stabiliscono una società con un fondo di zecchini* 100. *Uno di essi lascia il suo denaro nel negozio per* 3 *mesi, e l'altro per* 2, *e ritira ciascuno* 99 *zecchini, compreso il capitale, ed il guadagno. Quanto ha contribuito ciascuno* . . . . . » 140

LXXXV. *Dividere il* 10 *in due parti tali, che il loro prodotto dia* 100 . . . . . » 141

LXXXVI. *Trovare un numero, il cui quadrato sia eguale al medesimo numero prima diminuito di tre unità, e poi preso tre volte* . . . . . » 142

LXXXVII. *Sono dati due lumi d'intensità diversa, distanti tra loro di un intervallo* a. *Cercasi a quale distanza dell'uno, e dell'altro illumineranno egualmente.* . . . . . » 143

LXXXVIII. *Lasciato cadere un sasso entro un pozzo si trovò essere scorsi undici minuti secondi, e mezzo tra il momento, in cui il sasso si è lasciato cadere, e quello, in cui si udì il tonfo. Cercasi con questo dato la profondità del pozzo* . . . . . » 145

LXXXIX. *Un numero* a *d'uomini, e di donne per dare una festa da ballo hanno spesa una somma* 3b. *Ciascuna donna ha speso* m *meno di ciascun uomo, e tutti gli uomini insieme hanno speso il doppio di tutte le donne. Cercasi il numero degli uomini, e delle donne, e la spesa di ciascuno* . . . . . pag. 148

XC. *Cercansi due numeri* p, q *de' quali è data la somma* n, *ed il triplo della radice cubica del loro prodotto* m . . . . . » 150

XCI. *Trovare due quantità, la cui somma sia eguale alla differenza de' loro quadrati, e de' loro cubi* . . . . . » 152

XCII. *Vi sono due catene, le quali hanno queste particolarità, cioè, che se la* 1.ª *avesse tante volte più anelli, quanti ne ha la* 2.ª, *ne avrebbe* 600; *e se la* 2.ª *e la* 1.ª *avessero* 10 *volte più anelli di que', che hanno, ne avrebbero* 500. *Quanti anelli ha ciascuna* . . . . . » 153

XCIII. *Cercansi quattro numeri in proporzione aritmetica, ne' quali il prodotto degli estremi sia* m, *ed* n *quello de' medj* . » 154

PROBLEMI DI TERZO GRADO

XCIV. *Alcuni capitani d'esercito trovansi in guerra, ove ciascuno comanda ad un numero di cavalieri* m *volte maggiore, e ad un numero di fanti* n *volte maggiore di quello dei capitani. Ciascun cavaliere riceve per sua paga mensuale un numero di scudi, che corrisponde alla* q.^{esima} *parte dei capitani, e ciascun fante riceve la* p.^{esima} *parte de' cavalieri. Tutta la spesa mensuale ascende ogni mese a scudi* a. *Quanti sono i capitani* . . . . . » 158

XCV. *Alcuni negozianti formano un capitale sborsando ciascuno tante centinaja di lire, quanti sono gli associati. Il negozio guadagna per un dato tempo l'*n.^{plo} *per* 100 *quanti sono i socj, e frutta in tutto lir.* a. *Si cerca il numero de' socj, e quindi il guadagno di ciascuno* . . . . . » 159

XCVI. *Trovare tre numeri in proporzione doppia, che moltiplicati fra loro facciano* 64000 . . . . . » 161

XCVII. *Un pollajuolo cambia delle anitre con alcune galline in ragione di due anitre per tre galline. Ciascuna gallina fa tante uova da eguagliare la terza parte delle galline, ed il pollajuolo vende al mercato* 9 *uovi per tanti soldi, quante sono le uova, che ciascuna gallina ha fatte, e ne cava in tutto soldi* 72. *Si domanda quante anitre abbia cambiate, e quindi quante galline abbia ricevute, e quante uova faccia ogni gallina* . . . . . pag. 161

XCVIII. *Un signore riceve tutti gli anni da ciascuno de' suoi pigionanti tante some di frumento, quanto è l'* m.^{plo}, *e tante di vino, quanto è l'* n.^{plo} *del numero de' pigionanti. Ora avendo egli venduto in un anno tutto il frumento a* q *volte tante lire alla soma, e tutto il vino a* p *volte tante lire, quanti sono i pigionanti, ebbe di rendita lir.* r. *Cercasi il numero de' pigionanti* . . . . . » 163

XCIX. *Alcuni negozianti formano una società, e stabiliscono un capitale, cui ciascuno contribuisce dieci volte tanti scudi, quanto è il numero de' socj. Il negozio guadagna per ogni* 100 *scudi* 6 *scudi di più di un numero di scudi eguale al numero de' socj, e il guadagno totale è di scudi* 392. *Quanti sono i socj* . . . . . » 164

C. *Data la differenza* d *trovare tre numeri, che siano in progressione aritmetica, e che formino un prodotto eguale ad* a. » 165

CI. *Qual è quel numero, il cui cubo diminuito di esso numero moltiplicato per* 36 *dà* 91 *di residuo* . . . . . » 167

CII. *Cercansi due medj proporzionali tra i numeri* 5, *e* 625 . . » 168

CIII. *Trovare due numeri tali, che la loro somma sia eguale al quadrato del numero minore, e la differenza de' loro quadrati sia eguale al cubo dello stesso numero minore.* » 169

PROBLEMI DI QUARTO GRADO

CIV. *Un padre di famiglia dà tante migliaja di lire a ciascuno de' suoi figli, quanto è il loro numero, perchè unitamente s' impieghino nel commercio. Dopo un dato tempo egli trovò, che avendo essi la somma di lir.* 31250 *guada-*

gnarono sul capitale tanto per 100, *quanto era il quadrato del loro numero. Quanti sono i figli* . . . . . pag. 170

CV. *Interrogato un signore se avesse debiti, o crediti, rispose: io ho tante migliaja di lire di credito, quante sono le unità nella somma delle radici positive, e tante di debito, quante sono le unità nella somma delle radici negative dell'equazione* $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$. *Di quanto sarà egli debitore, o creditore* . . . . . » 171

CVI. *Il comandante di una fortezza assediata scrive al suo Re, che nella somma delle quattro radici dell'equazione* $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, *in cui alle formole generali si applichi il caso particolare di* $a=-10$; $b=35$; $c=-50$; $d=24$, *esprimesi il giorno del mese, che corre, entro il quale egli si deve arrendere, se non riceve sussidj. Le formole generali, e quindi questo giorno si ricercano dall'inimico, nelle cui mani cadde il viglietto* . . . . . » 172

CVII. *Un generale ha date tre battaglie; e tante ne ha vinte, quante sono le unità nelle radici positive reali, tante ne ha perdute, quante sono le unità nelle radici negative reali dell'equazione* $x^4+x^3-5x^2-3x+6=0$. *Quante battaglie ha perdute, e quante ne ha vinte* . . . . . » 175

PROBLEMI INDETERMINATI DI PRIMO GRADO

CVIII. *In quanti modi si possono pagare lir.* 1000 *in monete a lir.* 20, *ed a lir.* 16. . . . . » 178

CIX. *Trovar due numeri tali, che il triplo del* 1.° *faccia* 60 *diminuito del doppio del* 2.° . . . . . » 179

CX. *Cercasi in quanti modi con lir.* 1575 *in tanti zecchini a lir.* 15 *si possa pagare un debito di lir.* 728, *ricevendo in iscambio pel di più, che si potesse sborsare, tante pezze a lir.* 7 . . . . . » 180

CXI. *Se sia possibile pagare lir.* 2000 *in monete parte a lir.* 27, *e parte a lir.* 21. . . . . » 182

CXII. *Un mercante è debitore di lir.* 1200. *In mancanza di denaro offre in pagamento una stoffa di lir.* 7 *al metro, ed un'altra di lir.* 5. *In quanti modi potrà pagare il debito.* . » 183

CXIII. *Con lire cento voglionsi comperare cento uccelli tra passeri, tordi, e fagiani. I passeri costano un soldo ciascuno, una lira i tordi, e cinque lire i fagiani. Quante combinazioni di compera si possono fare* . . . . . pag. 184

CXIV. *I fagiani costano uno scudo, mezzo scudo le pernici, ed un duodecimo di scudo le quaglie. Si vogliono comperare* 160 *di questi volatili, e spendere soltanto* 75 *scudi. Cercansi le varie combinazioni della compera, che si possono fare* » 186

CXV. *Trenta persone tra uomini, donne, e fanciulli hanno pranzato all' osteria, ed hanno speso lir.* 50. *Ogni uomo ha speso lir.* 3; *ogni donna lir.* 2; *ogni fanciullo lir.* 1. *Quanti uomini, quante donne, e quanti fanciulli vi potevano essere* . . . . . » 187

CXVI. *Si cerca l' anno dell' Era Cristiana, in cui si ebbe, o si potrà avere susseguentemente* 17 *di ciclo solare,* 6 *di ciclo lunare, e* 5 *d' indizione* . . . . . » 189

CXVII. *Si debbono pagare lir.* 3285 *in doppie di Genova a lir.* 105, *in Sovrani a lir.* 45, *ed in Zecchini a lir.* 15. *Non si vogliono in tutto, che* 75 *pezzi. Cercasi in quanti modi si potrà eseguire il pagamento* . . . . . » 191

CXVIII. *Trovare tre numeri interi e positivi tali, che se si moltiplichi il* 1.° *per* 3, *il* 2.° *per* 5, *ed il* 3.° *per* 7 *la somma de' prodotti sia* 560; *e se si moltiplichi il* 1.° *per* 9, *il* 2.° *per* 25, *ed il* 3.° *per* 49 *sia* 2920 *la somma de' prodotti* » 192

PROBLEMI INDETERMINATI DI SECONDO GRADO

CXIX. *Un viaggiatore osservando le rarità di una casa illustre s'invaghì di varj quadri di due diverse scuole, e soprattutto d' uno in lavagna, opera antica, ov' è dipinta una Musa. Egli voleva acquistarli, e ne offeriva in prezzo una cassetta di fondo quadro piena di zecchini dispostivi in* 144 *piani; per cui essendo le pitture di ciascuna scuola tra* 80, *e* 100 *avrebbe dato per ogni pezzo tanti zecchini, quanti erano i pezzi della scuola rispettiva, e tanti per la Musa quanti erano i pezzi delle due scuole moltiplicati insieme. Determinare quante erano, e quanto sarebbero importate*

le pitture di ciascuna scuola, quanto veniva a pagarsi la Musa, quanti zecchini si trovavano in ciascun piano della cassetta, e quale era il loro numero totale . . . . . pag. 194

CXX. *Trovare due numeri, che abbiano la somma, o la differenza de' loro quadrati eguale ad un quadrato* . . . . . » 198

CXXI. *Trovare due numeri, che abbiano la somma, o la differenza de' loro quadrati eguale ad un quadrato dato* . . . . . » 199

CXXII. *Con una equazione indeterminata di 2.° grado descrivere l'andamento del Cerchio* . . . . . » 200

CXXIII. *Con una equazione indeterminata di 2.° grado descrivere l'andamento della Parabola Apolloniana* . . . . . » 202

CXXIV. *Con una equazione indeterminata di 2.° grado descrivere l'andamento dell' Ellisse* . . . . . » 203

CXXV. *Con una equazione indeterminata di 2.° grado descrivere l'andamento dell' Iperbola riferita all' asse* . . . . . » 205

PROBLEMI ESPONENZIALI, E LOGARITMICI

CXXVI. *Si è impiegato un capitale* a *all'interesse composto* $\frac{m}{n}$. *Si vuol sapere in quanti anni diventerà* r.^{plo} . . . . . » 207

CXXVII. *In un regno cresce la popolazione in ciascun anno d'una parte* p.^{esima} *Si cerca il numero degli anni, che dovranno scorrere, affinchè la popolazione presente stia a quella di un dato ultimo anno nella ragione di* 1 : m . . . . » 208

CXXVIII. *Da una botte di vino, che conteneva pinte* a *si levano* b *pinte ogni giorno, e vi si rimette altrettanto d'acqua. Dopo estrazioni* n *quanto vi resterà di vino* . . . . . » 209

CXXIX. *Dato il peso, ed il diametro d'una palla da cannone trovare il diametro di un' altra palla, il cui peso sia cognito* » 211

CXXX. *Una persona prende a prestito un capitale di lir.* a *all' annuo interesse di lir.* r *per ogni lira, colla condizione di poter rimborsare questo capitale pagando in ciascun anno una somma di lir.* b. *Per quanto tempo dovrà pagarsi questa annualità, onde estinguere il capitale e gl' interessi* . . . . . » 212

FINE DEL TOMO PRIMO

PROBLEMI

DI GEOMETRIA ANALITICA

PROBLEMI D' ALGEBRA

E DI

GEOMETRIA ANALITICA

SCIOLTI

DA

CESARE ROVIDA

P. Professore di Matematica, Reggente del C. R. Liceo di P. M.
e Direttore del Collegio Imperiale di Milano

TOMO II.°

Contenente 80 Problemi di Geometria Analitica

MILANO, 1817.

Dai tipi di GIOVANNI BERNARDONI, *Corsia S. Marcellino*, N.° 1799.

GEOMETRIA ANALITICA

PROBLEMI DI PRIMO GRADO

Problema I.

Si vuol collocare uno specchio sul pavimento di una stanza in modo, che un Osservatore posto in un determinato punto, traguardando per esso, possa vedere una medaglia appesa alla verticale parete della stanza istessa. (Fig. 1.ª tav. 1.ª)

Soluzione

Supposto l'Osservatore nel punto C della stanza EAHG (Fig. 1.ª n.° 1.°), e presa CD per la sua altezza misurata dall'occhio al piede, trattasi di trovare un punto B sulla linea AC, in cui posto uno specchio, traguardando per esso, possa vedere una medaglia appesa al punto F della parete verticale AE. Suppongasi sciolto il problema, e sia B il punto cercato. Si congiungano le visuali FB, BD. I due triangoli AFB, CDB sono simili (n.° 235 lib. 5.° Elem. Geom. cit. nel 1.° Tomo. ediz. 1.ª). Dunque si avrà la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$AB : AF :: BC : CD \qquad (\varphi)$$

Facciasi $AC = a$; $AF = b$; $CD = c$; $AB = x$. Avrassi

$$BC = AC - AB = a - x$$

Sostituiti i valori analitici nella proporzione (φ) si otterrà

$$x : b :: a - x : c$$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si aggiunga bx. 3.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 4.° Si divida per $c + b$, e sarà

$$x = \frac{ab}{c + b}.$$

Costruzione

Prendasi (Fig. 1.ª n.° 2.°) $FK = CD = c$, e colla CK si congiungano i punti C, K. Da F si guidi parallela a KC la FB. Questa determinerà il punto B cercato. Infatti i due triangoli KAC, FAB sono simili (n.° 230 lib. 5.°). Dunque (luogo citato) si avrà la proporzione

$$AK : AF :: AC : AB \qquad (\varphi')$$

Ma $AK = AF + FK = AF + CD = b + c$. Dunque sostituiti i valori analitici nella proporzione (φ') sarà

$$b + c : b :: a : x = \frac{ab}{b + c} \qquad \text{Q. D. T.}$$

Problema II.

Dato un triangolo, ed un punto sopra uno de' suoi lati, trasformarlo in un altro triangolo avente il vertice in esso punto, e la base collocata sulla base prima prolungata all'uopo. (Fig. 2.ª tav. 1.ª)

Soluzione

Abbiasi il triangolo ABC (Fig. 2.ª), e il punto D sul lato AB. Si voglia trasformare questo triangolo in un altro, che abbia il suo vertice in D, e la cui base sia posta sulla base AC prolungata secondo il bisogno. Suppongasi, che la retta AE sia quella, che soddisfaccia al problema, per cui il chiesto triangolo sia ADE.

Facciasi $AD = a$; $AB = b$; $AC = c$; $AE = x$. I due triangoli ABC, ADE debbono essere uguali in area per condizione del problema, onde intorno all'angolo A comune avranno i lati reciprocamente proporzionali (n.° 251 lib. 5.°), e si avrà l'analogia

$$AD : AC :: AB : AE$$

Analiticamente . . . . . $a : c :: b : x$

1.° Facciasi il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si divida per a, e sarà

$$x = \frac{bc}{a}$$

Costruzione

Si congiunga il dato punto D col punto C per mezzo della retta CD. Si tiri da B una parallela a DC cadente sul lato AC prolungato.

Questa mi determinerà il punto E, di cui si cerca. Infatti i due triangoli simili ADC, ABE danno la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

AD : AC :: AB : AE

Analiticamente, come sopra . . . $a : c :: b : x = \frac{bc}{a}$ C. D. T.

Problema III.

Dati due punti sulla base di un triangolo determinarne altri due sugli altri lati in modo, che congiunti coi dati n'emerga un parallelogrammo. (Fig. 3.ª tav. 1.ª)

Soluzione

Sia (Fig. 3.ª n.° 1.°) ABC il triangolo dato, e sieno E, D i punti dati sul lato AB. Supposti K, H gli altri due punti, di cui si cerca, sarà EDKH il parallelogrammo, che ne deve risultare, e quindi riuscirà KH parallela, ed eguale ad ED.

Facciasi $AB = a$; $AC = b$; $ED = c$; $CK = x$. Dai due triangoli simili CAB, CKH avrassi la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

AB : AC :: KH : KC

Ma KH = DE. Dunque sostituita questa linea sarà invece la proporzione

AB : AC :: DE : KC

Analiticamente . . . . . $a : b :: c : x$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de'medj. 2.° Si divida per a, e sarà

$$x = \frac{bc}{a}$$

Costruzione

Prendasi (Fig. 3.ª n.° 2.°) da B verso A la parte $BF = ED = c$, e da F si conduca la FK parallela a BC. La linea CK, che così viene a determinarsi sarà la cercata; per cui da K condotta la KH parallela ad AB, e uniti i punti K, H coi punti E, D rispettivamente, si otterrà il quadrilatero KHDE, che sarà il chiesto parallelogrammo. Infatti dalla somiglianza de' triangoli ABC, AFK avrassi la proporzione (n.° 232 lib. 5.°)

AB : AC :: FB : KC

Ma FB = ED. Dunque . . . AB : AC :: ED : KC

Analiticamente . . . . . $a : b :: c : x = \frac{bc}{a}$ C. D. T.

Problema IV.

Data una retta segata in un punto qualunque prolungarla in modo, che il rettangolo composto dalla data retta più la parte aggiunta in essa parte aggiunta sia eguale al quadrato della retta composta dal segmento della data preso verso la parte aggiunta, e da questa parte aggiunta. (Fig. 4.ª tav. 1.ª)

Soluzione

Sia AB (Fig. 4.ª) la data retta, divisa in un punto qualunque C, e si voglia prolungarla in E, talchè sia il rettangolo di tutta AE in EB eguale al quadrato della retta CE. Per condizione del problema avrassi l'equazione

$$AE \,.\, EB = (EC)^2 \qquad (\pi)$$

Chiamisi $AB = a$; $CB = b$; $BE = x$. Sarà conseguentemente

$$AE = AB + BE = a + x \; ; \; CE = CB + BE = b + x$$

Sostituiti questi valori nell'equazione (π) si otterrà

$$(a + x)x = (b + x)^2$$

1.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 2.° Si faccia il quadrato di $b+x$. 3.° Si sottragga x^2, e $2bx$. 4.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 5.° Si divida per $a - 2b$, e sarà

$$x = \frac{b^2}{a - 2b}$$

Costruzione

Dal punto C verso A prendasi $CD = CB = b$, e si avrà

$$AD = AB - DC - CB = AB - 2CB = a - 2b$$

Da C si alzi perpendicolarmente $CL = AD$, e da B si alzi pure perpendicolarmente $BH = CB$. Si congiungano quindi i punti L, B colla retta LB. Dal punto H condotta la retta HE parallela a BL, questa determinerà il punto E cercato. Infatti per essere simili i due triangoli LCB, HBE si avrà la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$CL : CB :: BH : BE$$

Ma $CL = AD$, e $BH = CB$. Dunque sarà pure

$$AD : CB :: CB : BE$$

Analiticamente . . . . . $a - 2b : b :: b : x = \frac{b^2}{a - 2b}$ C. D. T.

Problema V.

Da un punto dato fuori di due parallele condurre una segante tale, che la parte intercetta tra le medesime sia eguale ad una data retta, la quale però sia maggiore della retta, che misura la distanza delle parallele istesse. (Fig. 5.ª tav. 1.ª)

Soluzione

Sieno date di posizione rispetto al punto dato C (Fig. 5.ª n.° 1.°) le MN, PQ parallele tra loro. Sia pur data la retta AB maggiore della distanza, che passa tra le due parallele. Vuolsi condurre da C una segante tale, che riesca DH = AB. Dall' esame della figura non iscorgendosi alcuna relazione tra le cose cognite, e le incognite converrà ricorrere alla costruzione di quelle linee, che dipendono dalla condotta segante. A tale oggetto dal punto C conducasi CF perpendicolare alle parallele. I triangoli DCF, HGC sono simili, onde avrassi la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$CF : CD :: CG : CH \qquad (\pi)$$

Si chiami $AB = DH = a$; $CF = b$; $FG = c$; $CD = x$. Si avrà

$$GC = CF - FG = b - c \; ; \; CH = CD - DH = x - a$$

Sostituiscansi questi valori analitici nella proporzione (π), e si otterrà

$$b : x :: b - c : x - a$$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si sottragga bx. 3.° Si aggiunga cx, ed ab. 4.° Si divida per c, e sarà

$$x = \frac{ab}{c}$$

Costruzione

Pongansi le rette (Fig. 5.ª n.° 2.°) UZ, UY ad angolo qualunque in U, e si prenda UR = GF ; UE = AB ; US = CF. Si congiungano i punti R, E colla retta RE, e da S si tiri ST parallela ad RE. La retta UT così determinata rappresenterà il valore trovato per la x. Infatti per essere simili i triangoli URE, UST si avrà (luogo citato) l'analogia

$$UR : UE :: US : UT$$

E sostituite le rette eguali per costruzione sarà

GF : AB :: CF : UT

Analiticamente . . . . . $c : a :: b : x = \frac{ab}{c}$

Ciò posto: fatto centro in C (Fig. 5.ª n.° 3.°), e coll'intervallo UT per raggio descritto l'arco di cerchio *mn*, segata con quest'arco la MN ne' punti I, O', se da questi punti si condurranno i raggi CI, CO' questi daranno due rette seganti le parallele, che avranno le parti B'O', IA' intercette dalle parallele istesse uguali alla data retta AB. C. D. T.

Problema VI.

Trovare un punto sul lato di un triangolo qualunque, da cui condotta una parallela alla base sia questa eguale alla retta intercetta tra il punto chiesto, e l'estremità del lato verso la base. (Fig. 6.ª tav. 1.ª)

Soluzione

Sia ABC (Fig. 6.ª) il triangolo dato. Suppongasi sciolto il problema, e sia condotta la DE parallela ad AB. Fatto $AC = a$; $AB = b$; $DC = x$ si avrà $AD = AC - DC = a - x$, e per condizione del problema sarà pure $DE = AD = a - x$. Ora per essere simili i due triangoli ACB, DCE si avrà la proporzione (n.° 231 lib. 5.°)

AC : CD :: AB : DE

Analiticamente . . . . . $a : x :: b : a - x$

1.° Facciasi il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si aggiunga ax. 3.° Si ordini l'equazione per x. 4.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 5.° Si divida per $a + b$, e sarà

$$x = \frac{a^2}{a + b}$$

Costruzione

Si prolunghi CB in F, talchè sia $CF = CA + AB$; quindi si uniscano i punti F, A colla retta FA. Presa $CG = AC$, pel punto G si meni la GD parallela ad FA. Se dal punto D così determinato condurrassi DE parallela ad AB sarà questa la linea cercata. Infatti dai triangoli simili ACF, DGC si ha la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

CF : CA :: CG : CD

E sostituite le linee uguali per costruzione sarà

$$CA + AB : CA :: CA : CD$$

Analiticamente . . . . $a + b : a :: a : x = \frac{a^2}{a + b}$ C. D. T.

Problema VII.

In un dato triangolo inscrivere un quadrato tale, che uno de' suoi lati poggi sulla base del triangolo. (Fig. 7.ª tav. 1.ª)

Soluzione

Sia ABC (Fig. 7.ª) il triangolo dato. Dal vertice B si abbassi la perpendicolare BD. Dati i lati di un triangolo è pur cognita la perpendicolare (Vedi problema 17.°); onde potrà farsi $BD = b$; ed $AC = d$. Sia x il lato del chiesto quadrato, e suppongasi EFGO essere il quadrato. Sarà $LD = FE = x$; e quindi $BL = BD - DL = b - x$. Ora per la simiglianza de' triangoli ABC, FBG avrassi la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$AB : AC :: BF : FG$$

E permutando. . . . . $AB : BF :: AC : FG$ (φ)

Ma dai triangoli pur simili ABD, FBL si ha parimenti

$$AB : FB :: BD : BL \qquad (\varphi')$$

Dunque paragonando (φ), e (φ') si avrà quest' altra proporzione

$$AC : FG :: BD : BL$$

Analiticamente . . . . . $d : x :: b : b - x$

1.° Si eseguisca il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si aggiunga dx. 3.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 4.° Si divida per $b + d$, e sarà

$$x = \frac{bd}{b + d}$$

Costruzione

Producasi la base del dato triangolo in M, onde sia $DM = AC$, e poscia in N, talchè si abbia $MN = BD$. Quindi si tiri la retta BN. Se da M condurrassi una parallela a BN, che tocchi in un punto L la perpendicolare BD, guidata per esso punto L una retta FG parallela alla

base, e dai punti F, G abbassate le perpendicolari FE, GO avrassi il chiesto quadrato. Infatti da' simili triangoli BDN, LDM si otterrà la proporzione (n.° 231 lib. 5.°)

$$DN : DM :: DB : DL$$

E sostituite le rette eguali per costruzione sarà

$$AC + BD : AC :: DB : FG$$

Analiticamente . . . . . $d + b : d :: b : x = \frac{bd}{d+b}$. C. D. T.

Problema VIII.

Dati due cerchi, e la distanza de' loro centri condurre una retta, che riesca tangente ad ambedue. (Fig. 8.ª tav. 1.ª)

Soluzione

Sia EFG (Fig. 8.ª) la chiesta tangente, ed ai punti di contatto si guidino le rette BF, AG, che sono due raggi: quindi uniscansi i centri A, B colla AB, che si prolunghi sino al concorso della tangente in E. Facciasi $AB = a$: sia r il raggio del cerchio maggiore; r' quello del minore; e si assuma $BE = x$. Sarà $AE = AB + BE = a + x$. I due triangoli GEA, BEF simili danno la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$AG : AE :: BF : BE$$

E permutando . . . . . $AG : BF :: AE : BE$

Analiticamente . . . . . $r : r' :: a + x : x$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si sottragga xr'. 3.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 4.° Si divida per $r - r'$, e sarà

$$x = \frac{ar'}{r - r'}$$

Costruzione

Se dai centri dei due cerchi dati si condurranno due altri raggi BD, CA tra loro paralleli, e si congiugneranno i punti C, D colla CD, che venga prolungata sino al concorso in un punto E colla data AB, la quale si prolunghi essa pure all'uopo, verrà determinato in E il punto, da cui condotta una tangente al primo cerchio, ove si prolunghi, sarà pur tangente

al secondo. Infatti i due triangoli simili sopra indicati danno la proporzione

$$AC : BD :: AE : EB$$

Analiticamente . . . . . $r : r' :: a + x : x = \frac{ar'}{r - r'}$ C. D. T.

Osservazione

Che se poi si volesse condurre una tangente, che cada fra mezzo ai due cerchi si dovrebbe cercare un punto e sulla direzione AB, per cui far passare una retta DF', la quale riescisse tangente ad ambedue i cerchi. I due triangoli AeF', DeB sono simili, onde chiamata B$e = x$, sarà Ae = AB − B$e = a - x$, e quindi nella proporzione trovata superiormente invece del segno negativo posto fra le due lettere, che costituiscono il 3.° termine, si assumerà il segno contrario, cioè il positivo, e si ricaverà similmente

$$x = \frac{ar'}{r + r'}$$

Condotti pertanto i raggi Bd, Ac tra loro paralleli, e uniti i punti c, d colla retta cd, questa taglierà AB nel punto e, che sarà il cercato, dal quale condotta una retta riuscirà ad ambedue i cerchi tangente.

Problema IX.

Dato un angolo, e un punto entro di esso condurre da questo punto una linea retta chiudente spazio, e tale, che ivi resti divisa in parti proporzionali a due rette date. (Fig. 9.ª tav. 1.ª)

Soluzione

Sia ZAY (Fig. 9.ª n.° 1.°) l'angolo dato, e B il punto in esso. Trattasi di condurre CD per modo, che le parti CB, BD sieno proporzionali a due rette qualunque m, n. Suppongasi sciolto il problema, e pel dato del problema istesso si avrà la proporzione

$$CB : BD :: m : n \qquad (\varphi)$$

Questa proporzione però non basta a determinare le due rette. Conducasi

dal punto B la retta BE parallela ad AY, ed i triangoli simili, che n'emergono CBE, CAD daranno la proporzione (n.° 230 lib. 5.°)

$$CE : EA :: CB : BD \qquad (\pi)$$

Paragonando (φ) con (π) si otterrà l'altra proporzione

$$CE : EA :: m : n \qquad (q)$$

Ciò posto: facciasi $AE = a$; $AC = x$. Sarà $CE = CA - EA = x - a$
Sostituiti questi valori nella proporzione (q) avrassi

$$x - a : a :: m : n$$

1.° Si eseguisca il prodotto degli estremi, e quello de' medj. 2.° Si aggiunga an. 3.° Si divida per n, e sarà

$$x = \frac{am + an}{n} = a + \frac{am}{n}$$

Costruzione

Prendasi (Fig. 9.ª n.° 2.°) sulla direzione AY la retta $AF = n$, e la retta $FH = m$, e sulla direzione AZ la retta $AE = a$. Si tiri dai punti F, E la retta FE; e dal punto H si guidi HC parallela ad FE. Questa determinerà il punto C, da cui pel dato punto B condotta la CD avrassi la retta chiudente spazio, che in B sarà divisa proporzionalmente alle due rette date. Infatti pe' triangoli simili, e pel citato luogo si ha la proporzione

$$AF : FH :: AE : EC$$

Ed analiticamente per trovare l'espressione di EC si avrà

$$n : m :: a : EC = \frac{am}{n}$$

Ma $AC = AE + EC = a + \frac{am}{n} = x$. Dunque la linea CD è la cercata verificandosi la proporzione superiormente trovata (π)

$$CB : BD :: CE : EA :: \frac{am}{n} : a :: am : an :: m : n \qquad \text{C. D. T.}$$

Problema X.

Dal centro di un cerchio qualunque condotto un raggio prolungato oltre la periferia per una determinata distanza, e dall'estremo di esso raggio così prolungato eretta una perpendicolare, cercasi in questa un punto tale, da cui condotta al centro una secante, la porzione della per-

pendicolare segnata dal chiesto punto riesca eguale alla porzione della secante istessa esteriore al cerchio. (Fig. 10.ª tav. 1.ª)

Soluzione

Sia CB il dato raggio (Fig. 10.ª), e si prolunghi d'una data quantità BD. Dal punto D si alzi perpendicolarmente la retta DA. Trattasi di trovare in questa un punto A tale, che per esso condotta la secante al centro AC si abbia AD = AG

Facciasi $CB = r$; $BD = a$; $AD = x$

Per condizione del problema sarà pure $AG = AD = x$. Suppongasi A essere il punto chiesto, e si conduca la secante AC. Il triangolo CAD è rettangolo. Dunque si avrà l'equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(CA)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$$

Ma $AC = AG + CG$; e $DC = BD + BC$. Dunque sarà pure

$$(AG + CG)^2 = (AD)^2 + (BD + BC)^2$$

Analiticamente . . . . . $(x + r)^2 = x^2 + (a + r)^2$

1.° Si eseguiscano i quadrati. 2.° Si sottragga x^2, ed r^2. 3.° Si divida per $2r$, e sarà

$$x = \frac{a^2 + 2ar}{2r} = \frac{a}{2r}(2r + a)$$

Costruzione

Nel dato cerchio producasi il raggio BC in E sino alla periferia, ed avrassi $BE = 2BC = 2r$; e quindi $ED = EB + BD = 2r + a$. Dal punto B si alzi perpendicolarmente una retta $BF = BD$, e congiungansi i punti F, E colla retta FE. Se si prolungherà sino al concorso della perpendicolare alzata dal punto D si avrà in A il punto cercato, e sarà $AD = AG$. Infatti per essere simili i triangoli DEA, BEF si avrà (n.° 234 lib. 5.°)

$$EB : BF :: ED : DA$$

Analiticamente . . . $2r : a :: 2r + a : x = \frac{a}{2r}(2r + a)$ C. D. T.

Problema XI.

Conoscendo l'altezza di due oggetti posti al disopra dello stesso piano, e la loro distanza parallela al piano, trovare su questa un punto, che sia equedistante dai due oggetti. (Fig. 11.ª tav. 1.ª)

Soluzione

Sieno AC, BD (Fig. 11.ª) le altezze di due oggetti C, D posti al disopra di un piano, e sia AB la nota loro distanza parallela ad esso piano, trattasi di trovare in essa un punto E equedistante da C, e da D. Se è possibile il condurre una linea retta da C a D la soluzione del problema, com'è chiaro, consisterà nell'innalzare sopra la stessa retta CD dal punto K, preso alla metà della retta istessa, una perpendicolare KE, la quale prodotta sino al concorso della retta AB determinerà su di essa il chiesto punto E. Ciò è noto pei primi elementi di Geometria. Ma se non si può condurre questa linea determinerassi il punto nel modo seguente.

Sia $AC = a$; $BD = b$; $AB = c$; $AE = x$. Sarà $BE = AB - AE = c - x$

Pe' triangoli CAE, EBD si avranno le due equazioni (n.° 101 lib. 1.°)

$$(EC)^2 = (AC)^2 + (AE)^2$$
$$(ED)^2 = (BD)^2 + (EB)^2$$

Presa in ambedue la radice col segno positivo si avrà

$$EC = \sqrt{\{(AC)^2 + (AE)^2\}} \; ; \; ED = \sqrt{\{(BD)^2 + (EB)^2\}}$$

Analiticamente . . . $EC = \sqrt{(a^2 + x^2)}$; $ED = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2cx + x^2)}$

Ma per condizione del problema debb'essere $EC = ED$. Dunque si avrà

$$\sqrt{(a^2 + x^2)} = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2cx + x^2)}$$

1.° Si quadri questa equazione. 2.° Si sottragga x^2, ed a^2. 3.° Si aggiunga $2cx$. 4.° Si divida per $2c$, e sarà

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

E posto questo valore sotto forma più semplice per la costruzione sarà

$$x = \frac{c}{2} - \frac{1}{2c}\left((a + b)(a - b)\right)$$

Costruzione

Dal punto D si conduca la DF parallela ad AB, e questa AB si divida per metà in L; quindi pel punto L si faccia scorrere la retta ILG parallela ad AC, che taglierà DF in G.

Si prenda $LI = \frac{AB}{2} = AL = \frac{c}{2}$

$LH = \frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}(AC-DB) = \frac{1}{2}(AC-AF) = \frac{1}{2}FC$

$LO = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(a-b)+b = LH + DB = LH + GL = GH$

I punti così determinati I, O si congiungano colla retta IO, e da H si tiri ad essa parallela la retta HE. Questa determinerà sulla AB il punto E, di cui si cerca. Infatti per la simiglianza de' triangoli LOI, HLE si ha la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$LI : LO :: LH : LE$$

Analiticamente . . . $\frac{c}{2} : \frac{a+b}{2} :: \frac{a-b}{2} : LE = \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\frac{c}{2}} = \frac{1}{2c}\left((a+b)(a-b)\right)$

Ma $AE = AL - LE$. Dunque sostituiti i valori analitici sarà

$$AE = \frac{c}{2} - \frac{1}{2c}\left((a+b)(a-b)\right) = x \qquad \text{C. D. T.}$$

Problema XII.

Dato un cerchio descriverne esternamente due altri, i quali si tocchino fra loro, sieno tangenti al dato cerchio, e sieno talmente posti, che unendo con tre rette i loro centri si formi un triangolo simile a un dato. (Fig. 12.ª tav. 1.ª)

Soluzione

Il cerchio dato sia FGE (Fig. 12.ª n.° 1.°), e il triangolo dato sia MNO (Fig. 12.ª n.° 2.°). Trattasi di determinare i centri B, C di due altri cerchi esterni, che sieno tangenti fra loro, e al dato, e talmente posti, che il triangolo ABC risultante dall' unione dei tre centri sia simile al dato MNO. Supposto sciolto il problema sieno HFD, DGR i due cerchi. Egli è evidente (n.° 142 lib. 3.°), che ciascun lato del triangolo ABC verrà formato da due raggi, per esempio il lato BA dal raggio BF più il raggio FA.

Facciasi $MN = a$; $MO = b$; $NO = c$; $AF = d$; $AB = x$

E si avrà $BD = FB = AB - AF = x - d$. Per condizione del problema i due triangoli MNO, ABC debbono essere simili, e quindi si avrà l'analogia (n.° 234 lib. 5.°)

$$MO : MN :: AB : BC$$

Analiticamente . . . . . $b : a :: x : BC = \frac{ax}{b}$

Avrassi pure per la stessa ragione quest'altra proporzione

$$MN : NO :: BC : AC \qquad (\varphi)$$

Ma $CD = BC - BD = \frac{ax}{b} - x + d = \frac{ax - bx + bd}{b}$

$$AC = AG + GC = AF + CD = d + \left(\frac{ax - bx + bd}{b}\right) = \frac{2bd + ax - bx}{b}$$

Dunque sostituiti i valori analitici nella proporzione (φ) sarà

$$a : c :: \frac{ax}{b} : \frac{2bd + ax - bx}{b}$$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si divida per a, e si moltiplichi per b. 3.° Si aggiunga bx. 4.° Si sottragga ax. 5.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 6.° Si divida per $c + b - a$, e sarà

$$x = \frac{2bd}{c + b - a}$$

Costruzione

Nel dato cerchio (Fig. 12.ª n.° 3.°) si tiri in qualunque direzione il raggio AF, e si prolunghi indefinitamente in L. Su questo prolungamento vuolsi il centro d'uno dei due cerchi richiesti. Si applichi ad AL una retta indefinita AQ con qualunque siasi angolo, e su questa prendasi $AR = ON + MO - MN = c + b - a$, e facciasi $AP = 2MO = 2b$. Si congiunga il punto R col punto F per mezzo della retta RF, e da P si guidi ad essa RF parallela la retta PB sul raggio AF prolungato. Questo punto B determinerà il chiesto centro. Infatti i triangoli simili danno la la proporzione (luogo citato)

$$AR : AF :: AP : AB$$

Analiticamente . . . $c + b - a : d :: 2b : AB = \frac{2bd}{c + b - a} = x$

Determinato così il centro B col raggio BF si descriva il cerchio HDF.

Quindi sopra AB costruiscasi il triangolo ABC simile al dato MON (n.° 253 lib. 5.°) ponendo AB corrispondente ad MO, e trovato in tale guisa il punto C, fatto centro in esso, col raggio CD descrivasi l'altro cerchio, che, per costruzione, compirà la soluzione del problema. C. D. F.

Problema XIII.

Dato un cerchio inscrivervi tre altri cerchi eguali fra loro, fra loro tangenti, e tangenti al dato. (Fig. 13.ª tav. 1.ª)

Soluzione

Supponendo sciolto il problema dal centro B (Fig. 13.ª) del cerchio dato si guidino pei centri de' cerchi richiesti i raggi del cerchio dato AB, BC, BD. Questi andranno ai punti di contatto A, C, D (n.° 141 lib. 3.°). Si congiungano i centri de' cerchi richiesti, e n'emergerà il triangolo EGF equilatero, perchè le rette congiugnenti tali centri passando pel contatto (n.° 142 lib. 3.°) ogni lato del triangolo EGF sarà composto di due raggi eguali nella fatta supposizione, che i tre cerchi sieno eguali. Si conducano le rette AD, AC, CD. Il triangolo ADC sarà esso pure equilatero. Infatti per essere DF = AE, DB = AB pel confronto delle quantità eguali avrassi la proporzione

$$DF : DB :: AE : AB$$

Quindi i due triangoli DBA, FBE saranno simili; e la retta FE sarà parallela alla retta DA (n.° 230 lib. 5.°). Similmente proverebbesi AC parallela ad EG, e DC ad FG; onde il triangolo DAC sarà equilatero, come lo è il triangolo FEG. Ciò posto ACD sarà un triangolo equilatero inscritto nel cerchio. Dunque se ne conoscerà il lato espresso pel raggio, e quindi fatto a il raggio sarà $AD = a\sqrt{3}$ (Vedi il problema 44.°). Ora sia x il raggio de' chiesti cerchi. Si avrà $EB = AB - AE = a - x$; $FE = FH + HE = x + x = 2x$

Pe' triangoli simili FEB, DAB si otterrà la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$EB : EF :: AB : AD$$

Analiticamente . . . . . $a - x : 2x :: a : a\sqrt{3}$

1.° Facciasi il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si aggiunga $ax\sqrt{3}$.

3.° Si divida per a. 4.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 5.° Si divida per $2+\sqrt{3}$, e si avrà

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Costruzione

Si tiri il diametro AI, e si prolunghi in L, sicchè sia IL = AD. Si congiungano poscia i punti D, L colla retta DL. Dal centro B si meni ad essa DL parallela la retta BM, sarà MA il chiesto raggio. Infatti pei due triangoli simili DAL, MAB si avrà la proporzione (luogo citato)

$$AL : AB :: AD : AM$$

Ossia per costruzione . . . $AI + AD : AB :: AD : AM$

Analiticamente . . . $2a + a\sqrt{3} : a :: a\sqrt{3} : AM = \frac{a^2\sqrt{3}}{2a+a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = x$

Prese pertanto sui raggi AB, DB, BC condotti dai vertici del triangolo equilatero inscritto le rette AE, DF, GC tutte eguali alla retta MA, assunte queste rette per altrettanti raggi, e i punti F, E, G per centri, e descritti i tre cerchi corrispondenti, riesciranno questi tangenti fra loro, e tangenti al dato. C. D. F.

Osservazione

Si sa dagli elementi di Geometria, che in un triangolo rettangolo, in cui sia l'ipotenusa doppia di un cateto, rappresentata la prima per 2, ed il secondo per 1, l'altro cateto è $\sqrt{3}$, e quindi il Teorema di Pittagora introduce un incommensurabile, che prima non vi era. Se però l'incommensurabile entra di già nelle espressioni di quella ipotenusa, e di quel cateto può accadere, che il suddetto teorema non porti un nuovo irrazionale nel valore dell'altro cateto. Questo appunto avviene nel nostro caso, il quale perciò merita osservazione. Infatti nel triangolo EGF, che congiugne i centri dei cerchi trovati, se s'immagini abbassata dal vertice E una perpendicolare sulla FG, cioè EQ, sarà questa eguale alla radice quadrata del quadrato della retta FE doppia del raggio trovato, meno il quadrato del raggio istesso, per essere (n.° 101 lib. 5.°)

$$(EQ)^2 = (EF)^2 - (FQ)^2$$

Ed estraendo la radice . . . $EQ = \sqrt{\{(EF)^2 - (FQ)^2\}}$

Analiticamente . . . . . $EQ = \sqrt{\{(2x)^2 - x^2\}}$

Sostituito ad x il valore trovato nel problema sarà

$$EQ = \sqrt{\left(\frac{12a^4 - 3a^4}{(2a + a\sqrt{3})^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{9a^4}{(2a + a\sqrt{3})^2}\right)} = \frac{3a^2}{2a + a\sqrt{3}} = \frac{3a}{2 + \sqrt{3}}$$

dove si vede, che il secondo cateto EQ non ha un valore affetto da un nuovo radicale.

Problema XIV.

Dato il perimetro, ed i tre angoli di un triangolo costruire esso triangolo. (Fig. 14.ª tav. 1.ª)

Soluzione

Rappresenti LM (Fig. 14.ª n.° 1.°) il perimetro del triangolo, e gli angoli dati sieno (Fig. 14.ª n.° 2.°) EDG, EDF, FDH. Dalle condizioni del problema parrebbe, che la sua soluzione dovesse dipendere dalle proprietà delle linee trigonometriche, siccome quelle, che nella medesima relazione involgono gli angoli, ed i lati. Ma se si rifletta, che condotta EF (Fig. 14.ª n.° 2.°) parallela a GH si ha un triangolo EDF tutto cognito, il quale debb' essere simile al triangolo cercato per la eguaglianza degli angoli di quello, facilmente si conoscerà, che più semplicemente il problema ridurrassi a costruire col dato perimetro un triangolo simile ad un dato. Suppongasi pertanto sciolto il problema, e sia ABC (Fig. 14.ª n.° 3.°) il triangolo, di cui si cerca.

Chiamisi $ED = a$; $DF = b$; $FE = c$; $LM = p$; $AB = x$; $BC = y$; $AC = z$

Per la simiglianza dei triangoli BAC, EDF si avranno le seguenti proporzioni (n.° 234, e 239 lib. 5.°)

$$ED + DF + FE : CA + AB + BC :: \begin{cases} ED : CA \\ DF : AB \\ FE : BC \end{cases}$$

E sostituiti i valori analitici si otterranno

$$a + b + c : p :: \begin{cases} a : z = \dfrac{ap}{a + b + c} \\ b : x = \dfrac{bp}{a + b + c} \\ c : y = \dfrac{cp}{a + b + c} \end{cases}$$

Costruzione

Si applichi (Fig. 14.ª n.° 1.°) ad LM con un angolo qualunque la indefinita LZ, e presa $LK = ED = a$; $KN = DF = b$; $NR = FE = c$, si congiunga la retta RM, e si guidino dai punti K, N le rette KO, NP ad essa parallele. Co' segmenti LO, OP, PM costruito il triangolo OPQ (n.° 65 lib. 1.°) sarà esso il triangolo ricercato. Infatti per costruzione il triangolo OPQ ha il perimetro dato, per essere $OL = OQ$, e $PQ = PM$ rispettivamente raggi dello stesso cerchio. Inoltre per essere i segmenti LO, OP, PM (che corrispondono ai lati eguali rispettivamente OP, OQ, PQ) proporzionali alle parti LK, KN, NR (che corrispondono ai lati eguali ED, DF, FE) i due triangoli QOP, EDF saranno tra loro equiangoli, e quindi il triangolo QOP conterrà gli angoli eguali ai dati. C.D.F.

Problema XV.

In un triangolo qualunque trovare un punto, dal quale condotte tre rette ai tre vertici, resti il triangolo diviso in tre parti eguali. (Fig. 15.ª tav. 1.ª)

Soluzione

Sia ABC (Fig. 15.ª n.° 1.°) il triangolo dato, in cui si abbassi la perpendicolare AD. Supposto E il punto cercato, ed unite le rette EA, EB, EC, i triangoli AEC, AEB, CEB per condizione del problema saranno tra loro eguali, e quindi le loro basi saranno in ragione reciproca delle altezze; perchè se le aree di que' triangoli sono eguali (abbassate dal punto E sui lati le perpendicolari EN, EF, EM) si avrà sempre

$$\frac{1}{2}\, CA \,.\, NE = \frac{1}{2}\, AB \,.\, EF$$

e quindi prescindendo dal moltiplicatore $\frac{1}{2}$ comune ai due membri sarà

$$CA \,.\, NE = AB \,.\, EF$$

la quale equazione posta in proporzione ci darà

$$CA : AB :: EF : EN$$

in cui leggesi l'accennato teorema delle basi de' triangoli eguali in ragione reciproca delle altezze. Si avranno pertanto le proporzioni

$$EF : EM :: BC : AB \qquad (\varphi)$$
$$EN : EM :: BC : CA$$

Se poi dal punto H, in cui la BE sega l'altezza del dato triangolo, si abbassi sopra AB la perpendicolare HG, si avranno simili i triangoli BDH, BME, e gli altri due BGH, BFE, che ci daranno le proporzioni (n.° 234 lib. 5.°)

$$EB : EM :: BH : HD \qquad (\varphi')$$
$$EB : BH :: EF : HG \qquad (\pi)$$

Permutando (φ') . . . . . $EB : BH :: EM : HD$ (π')

Paragonando (π) e (π') . $EM : HD :: EF : HG$

Permutando . . . . . $EM : EF :: HD : HG$ (m)

Ed alternando la proporzione (φ) . . . $EM : EF :: AB : BC$ (n)

Paragonando (m) ed (n) . . . . . $EM : EF :: HD : HG :: AB : BC$

Da ciò scorgesi, che se da qualunque punto delle rette BE, CE si abbassino sui lati dell'angolo corrispondente due perpendicolari, queste saranno sempre nella ragione di AB : BC, o di AC : BC. Dunque il problema si riduce a trovare la posizione di due rette BE, CE, di cui ogni punto abbia questa proprietà. Il loro punto d'incontro sarà il ricercato.

Per determinare la posizione delle due rette BE, CE basterà determinare un punto di ciascheduna. Siano per maggiore comodità da determinarsi il punto L della retta CE, e il punto H della retta EB, presi ambedue sulla perpendicolare AD, che si conosce.

Facciasi $AD = a$; $BD = b$; $BC = c$; $AB = d$; $AC = m$; $AH = x$; $AL = y$

Sarà $HD = AD - AH = a - x$; $DC = CB - DB = c - b$; $LD = AD - AL = a - y$

I triangoli rettangoli ABD, AGH aventi anche un angolo acuto comune sono simili, onde (luogo citato) si avrà la proporzione

$$AB : BD :: AH : GH$$

Analiticamente . . . . . $d : b :: x : GH = \frac{bx}{d}$

Ed essendo per quello, che si è dimostrato

$$GH : HD :: BC : BA$$

Sostituiti i valori analitici sarà

$$\frac{bx}{d} : a - x :: c : d$$

1.° Facciasi il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si aggiunga cx. 3.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 4.° Si divida per $b+c$, e sarà

$$x = \frac{ca}{b+c}$$

Collo stesso andamento si troverebbe

$$y = \frac{ca}{2c-b}$$

Costruzione

Per costruire questi valori si prolunghi la base CB (Fig. 15.ª n.° 2.°) del triangolo ACB dall'una, e dall'altra parte in E, ed in F, talchè ciascun prolungamento sia eguale a CB. Si uniscano i punti F, A colla retta FA, e i punti A, E colla AE. Poi da' punti B, e C si guidino le rette BK, CH parallele ad EA, e ad FA. Sarà $AK = x$, ed $AH = y$. Infatti pei triangoli simili BKD, EAD si avrà la proporzione (n.° 232 lib. 5.°)

$$ED : DA :: EB : AK \qquad (q)$$

Ma $ED = EB + BD = CB + BD = c + b$

Dunque sostituiti i valori analitici in (q) si otterrà

$$c + b : a :: c : AK = \frac{ac}{c+b} = x$$

Egualmente dai triangoli simili FDA, CDH si caverà l'analogia

$$DF : DA :: CF : AH \qquad (q')$$

Ma $DF = FC + CB - BD = 2CB - BD = 2c - b$

Dunque sostituiti i valori analitici in (q') sarà

$$2c - b : a :: c : AH = \frac{ac}{2c-b} = y$$

Dunque prolungando la retta BK in M sino all'incontro della retta CH verrà determinato il punto M cercato, da cui condotte le rette MC, MA, MB il triangolo ACB sarà diviso in tre triangoli eguali. C. D. F.

Problema XVI.

Inscrivere in un dato cerchio due altri cerchi, che tra loro si tocchino, e tocchino il cerchio dato per modo, che uniti i tre centri si abbia un triangolo simile a un dato. (Fig. 16.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Sia C (Fig. 16.ª) il centro del cerchio dato, ABD il dato triangolo, e si suppongano trovati i due cerchi richiesti coi centri E, F. Congiunti i centri si prolunghi CE in G, e CF in H. Queste rette (n.° 141 lib. 3.°) andranno ai punti di contatto colla periferia del cerchio dato.

Facciasi $GC = r$; $EI = GE = x$; $FH = FI = y$

I lati del triangolo dato siano $BD = a$; $AB = b$; $DA = c$

Avrassi $EF = EI + IF = x + y$; $EC = CG - EG = r - x$; $FC = CH - FH = r - y$

I triangoli CEF, ABD sono simili per condizione del problema. Dunque si avranno le proporzioni

$$BD : BA :: EF : EC$$
$$BD : DA :: EF : FC$$

Analiticamente . . . . . $a : b :: x + y : r - x$

$$a : c :: x + y : r - y$$

Si faccia in ambedue il prodotto degli estremi, e de' medj, e si avrà

$$(x + y)\, b = a\,(r - x) \qquad (\varphi)$$
$$(x + y)\, c = a\,(r - y) \qquad (\varphi')$$

Dividendo (φ) per b, e (φ') per c sarà

$$x + y = \frac{a}{b}\,(r - x) \qquad (M)$$

$$x + y = \frac{a}{c}\,(r - y) \qquad (N)$$

Paragonando (M), ed (N), e dividendo per a si otterrà l' equazione

$$\frac{r - x}{b} = \frac{r - y}{c}$$

Posta questa equazione in proporzione avrassi

$$b : c :: r - x : r - y$$

Componendo (n.° 238 lib. 5.°) . . . $b : b + c :: r - x : 2r - x - y$ (π)

Componendo ancora diversamente . . $b + c : c :: 2r - x - y : r - y$ (π')

Cangiando i segni in (M) . . . . . $-x - y = -\frac{a}{b}(r - x)$

Sostituito in (π) questo valore. . . . $b : b + c :: r - x : 2r - \frac{a}{b}(r - x)$ (q)

Cangiando i segni in (N), ed a luogo di $-x - y$ ponendo in (π') il valor corrispondente si avrà

$$b + c : c :: 2r - \frac{a}{c}(r - y) : r - y \qquad (q')$$

Fatto in (q), ed in (q') il prodotto degli estremi, e de' medj sarà

$$2rb - a(r-x) = (b+c)(r-x) \qquad (Q)$$
$$2rc - a(r-y) = (b+c)(r-y) \qquad (Q')$$

Aggiugnendo in (Q) la quantità $a(r-x)$, ed in (Q') $a(r-y)$ riescirà

$$2rb = (b+c)(r-x) + a(r-x) = (b+c+a)(r-x) \qquad (u)$$
$$2rc = (b+c)(r-y) + a(r-y) = (b+c+a)(r-y) \qquad (u')$$

Dividendo (u), ed (u') per $b+c+a$ si otterrà

$$r - x = \frac{2rb}{b+c+a} \qquad (\lambda)$$

$$r - y = \frac{2rc}{b+c+a} \qquad (\lambda')$$

Aggiugnendo x in (λ), e sottraendovi $\frac{2rb}{b+c+a}$; ed in (λ') aggiugnendo y, e sottraendovi $\frac{2rb}{b+c+a}$ si avrà finalmente

$$x = r - \frac{2rb}{b+c+a} = \frac{rb+rc+ra-2rb}{b+c+a} = \frac{rc+ra-rb}{b+c+a} = r\left(\frac{c+a-b}{b+c+a}\right)$$
$$y = r - \frac{2rc}{b+c+a} = \frac{rb+rc+ra-2rc}{b+c+a} = \frac{rb+ra-rc}{b+c+a} = r\left(\frac{b+a-c}{b+c+a}\right)$$

Costruzione

Si prolunghi BD da ambedue i suoi estremi, e prendasi BM=Bm=BA; DN=Dn=DA. Avrassi

$$MN = BM + BD + DN = BD + BA + AD = a + b + c$$
$$Mn = BM + BD - Dn = BA + BD - DA = b + a - c$$
$$Nm = DN + BD - Bm = AD + BD - BA = c + a - b$$

Ciò posto conducasi nel dato cerchio un raggio CG, e facciasi la proporzione per una quarta proporzionale dopo tre date (n.° 249 lib.° 5.°)

$$MN : Nm :: CG : EG$$

Sarà analiticamente . . . $a+b+c : c+a-b :: r :$ EG

Facciasi il prodotto de' medj, e si divida pel 1.° termine. Avrassi

$$EG = r\left(\frac{c+a-b}{b+c+a}\right) = x$$

Quindi si applichi al raggio CG un altro raggio CH tale, che formi l'angolo GCH = BAD, e s'instituisca la proporzione

$$MN : Mn :: CH : FH$$

Sarà analiticamente. . $a+b+c : b+a-c :: r : FH = r\left(\frac{b+a-c}{a+b+c}\right) = y$

Dunque descritti due cerchi coi centri E, F, e coi raggi EG, FH, questi saranno i ricercati, cioè si toccheranno fra loro, toccheranno il cerchio dato, ed il triangolo ECF risultante dall'unione dei tre cerchi sarà simile al dato BAD; giacchè questi raggi soddisfanno ai valori trovati per x, e per y nella supposizione delle condizioni del problema già verificate. C. D. T.

PROBLEMI DI SECONDO GRADO

Problema XVII.

Dato un triangolo trovare il valore della perpendicolare condotta da un angolo sul lato opposto. (Fig. 17.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Sia dato il triangolo ABC qualunque (Fig. 17.ª). Trattasi di determinare il valore della perpendicolare BD dall'angolo B condotta sull'opposto lato AC. Il triangolo essendo dato si potranno indicare i suoi lati per mezzo di quantità cognite; onde si potrà assumere $AB=a$; $BC=b$; $AC=d$. Sia $BD=x$. Dal triangolo rettangolo ABC si ha l'equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(BC)^2=(BD)^2+(DC)^2$$

Sottraendo $(BD)^2$, ordinando per $(DC)^2$, ed estraendo la radice presa positivamente sarà

$$DC=\sqrt{\{(BC)^2-(BD)^2\}}$$

Analiticamente . . . . . $DC=\sqrt{(b^2-x^2)}$

Collo stesso andamento si avrà . . . $AD=\sqrt{(a^2-x^2)}$

Ma $AC=AD+DC$. Dunque sostituiti i valori analitici sarà

$$d=\sqrt{(b^2-x^2)}+\sqrt{(a^2-x^2)} \qquad (\varphi)$$

1.° Sottraggasi $\sqrt{(a^2-x^2)}$. 2.° Si quadri l'equazione, che ne sorte. 3.° Si

prescinda dal $-x^2$ comune ai due membri dell'equazione. 4.° Si sottragga b^2, e si aggiunga $2d\sqrt{(a^2-x^2)}$. 5.° Si ordini l'equazione per x, e sarà

$$2d\sqrt{(a^2-x^2)}=d^2+a^2-b^2$$

6.° Si quadri questa equazione. 7.° Si aggiunga $4d^2x^2$. 8.° Si sottragga $(d^2+a^2-b^2)^2$. 9.° Si ordini per x. 10.° Si divida per $4d^2$. 11.° Si estragga la radice, presa positivamente, e sarà

$$x=\sqrt{\left(\frac{4a^2d^2-(d^2+a^2-b^2)^2}{4d^2}\right)}=\frac{1}{2d}\sqrt{\left(4d^2a^2-(d^2+a^2-b^2)^2\right)}$$

Questo sarà il valore cercato della perpendicolare. Non richiedendo esso geometrica costruzione, passeremo ad applicarlo a qualche caso particolare.

Applicazione

Supponiamo, che nel dato triangolo il lato AC sia Metri 5, il lato BC 4, e il lato AB 3. Avrassi $d=5$; $b=4$; $a=3$. Dunque sostituiti i valori nella formola generale sarà

$$x=\frac{1}{2.5}\sqrt{\left(4.25.9-(25+9-16)^2\right)}=\frac{1}{10}\sqrt{(900-324)}=\frac{1}{10}\sqrt{576}=\frac{24}{10}=2,4$$

Dunque la chiesta perpendicolare sarebbe di Metri 2, e 4 palmi.

Verificazione

Si può verificare questa soluzione collo sostituire i valori cogniti, e il valore trovato per la perpendicolare nell'equazione (φ), e si troverà essere $d=5$. Infatti

$$d=\sqrt{\left(16-\left(\frac{24}{10}\right)^2\right)}+\sqrt{\left(9-\left(\frac{24}{10}\right)^2\right)}=\sqrt{\left(\frac{1600-576}{100}\right)}+\sqrt{\left(\frac{900-576}{100}\right)}=\sqrt{\left(\frac{1024}{100}\right)}+\sqrt{\left(\frac{324}{100}\right)}=\frac{32}{10}+\frac{18}{10}=\frac{50}{10}=5$$

Problema XVIII.

Dato un cateto di un triangolo rettangolo, trovare l'ipotenusa, e l'altro cateto, i cui quadrati stiano fra loro :: 3 : 2 (Fig. 18.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Chiamisi a il cateto cognito, x l'ipotenusa, ed y l'altro cateto. Per condizione del problema avrassi la proporzione

$$x^2 : y^2 :: 3 : 2$$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj, e quindi diviso per 2 sarà

$$x^2 = \frac{3y^2}{2} \qquad (\varphi)$$

Per condizione pure del problema (n.° 101 lib. 1.°) si avrà

$$x^2 = a^2 + y^2$$

1.° Si sostituisca in questa equazione ad x^2 il suo valore trovato in (φ) 2.° Si moltiplichi per 2. 3.° Si sottragga $2y^2$, e presa la radice col segno positivo si otterrà

$$y = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

Costruzione

Sia AB il cateto dato eguale ad a; all' estremo B si applichi ad angolo retto una retta indefinita BC, ed in A perpendicolarmente si alzi $AD = AB = a$. Congiungansi i punti B, D colla retta BD. Sarà questa eguale alla quantità $a\sqrt{2} = y$. Abbiamo infatti per costruzione (luogo citato)

$$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 = 2(AB)^2 = 2a^2$$

E presa la radice positiva . . . $BD = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = y$

Ora fatto centro in B, preso l'intervallo BD per raggio, si descriva l'arco di cerchio DE, che seghi in E la indefinita BC. Sarà BE l'altro cateto, per essere $BD = BE$ raggi del medesimo cerchio. E per conseguenza condotta la retta AE il triangolo ABE sarà il cercato, in cui il quadrato dell'ipotenusa sta al quadrato del cateto BE nella voluta ragione di 3 : 2. Avendosi infatti

$$(AE)^2 = (AB)^2 + (BE)^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$$

si verificherà la proporzione

$$(AE)^2 : (EB)^2 :: 3a^2 : 2a^2 :: 3 : 2 \qquad \text{C. D. T.}$$

Problema XIX.

Dato un triangolo dividerlo per metà con una retta perpendicolare sopra uno dei lati. (Fig. 19.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Sia ABC il triangolo dato (Fig. 19.ª), e vogliasi dividere per metà con una retta perpendicolare ad uno de' suoi lati. Dal vertice si abbassi la perpendicolare AE. Sia LD la chiesta perpendicolare.

Facciasi $BE = c$; $AE = d$; $BC = b$; $BD = x$. Si avrà la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$BE : AE :: BD : DL$$

Analiticamente . . . . . $c : d :: x : DL = \frac{dx}{c}$

La superficie del triangolo BAC sarà $\frac{BC \,.\, AE}{2}$ (n.° 423 lib. 9.°)

Quella del triangolo BDL sarà $\frac{BD \,.\, DL}{2}$. Ma per condizione del problema il triangolo BAC debb' essere il duplo di BDL. Dunque si avrà l' equazione

$$BD \,.\, DL = \frac{BC \,.\, AE}{2}$$

Analiticamente . . . . . $\frac{dx^2}{c} = \frac{bd}{2}$

1.° Si moltiplichi per c. 2.° Si divida per d. 3.° Si estragga la radice, e sarà

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{cb}{2}\right)}$$

Costruzione

Dal punto B si alzi sopra BC una perpendicolare $BO = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2}$, e si prolunghi al disotto in H, talchè sia $BH = BE = c$. Presa OH per diametro si descriva il semicerchio ODH. Si avrà (n.° 120 lib. 2.°)

$$(BD)^2 = OB \,.\, BH$$

Estraendo la radice . . . $BD = \pm\sqrt{(OB \,.\, BH)}$

Analiticamente . . . . . $BD = \pm\sqrt{\left(\frac{cb}{2}\right)} = x$

Alzata pertanto dal punto D la perpendicolare DL sul lato CB il triangolo BLD sarà la metà del triangolo proposto.

Osservazione

Nel valore per la x si è assunto il segno positivo. La quantità negativa varrebbe per la soluzione dello stesso problema al disotto del triangolo, presa negativamente la direzione della retta DL.

Problema XX.

Data di posizione una retta, e due punti fuori di essa descrivere un cerchio, che passi per questi punti, e sia tangente alla data retta. (Fig. 20.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Sia PQ (Fig. 20.ª) la data retta; A, e B i dati punti; e suppongasi ACB essere il cerchio descritto colle condizioni del problema. Congiungansi i punti dati colla retta AB, che si produca ad incontrare in D la retta PQ. Si avrà l'equazione (n.° 166 lib. 3.°)

$$(DC)^2 = BD \,.\, DA \qquad (M)$$

Sia $DC = x$; $AB = a$; $AD = b$. Sarà $DB = DA + AB = b + a$
Sostituiti questi valori analitici in (M) si avrà

$$x^2 = b(a+b)$$

Estraendo la radice . . . . $x = \pm\sqrt{(b(a+b))}$

Costruzione

Si prolunghi BD in E, onde sia $DE = AD = b$, e presa EB per diametro si descriva il semicerchio EFB. Dal punto D s'alzi DF perpendicolarmente sino alla periferia: quindi fatto centro in D col raggio DF si seghi la retta PQ in C. Se pei tre punti A, C, B farassi passare un cerchio, il che si ottiene circoscrivendo un cerchio al triangolo ABC (n.° 178 lib. 4.°), avrà questo le condizioni volute dal problema. Si ha infatti (n.° 120 lib. 2.°)

$$(DF)^2 = ED \,.\, DB$$

Ma $(DF)^2 = (DC)^2$. Dunque $(DC)^2 = ED \,.\, DB$
Analiticamente. . . . . $(DC)^2 = (a+b)\,b$
Ed estraendo la radice . . . . $DC = \pm\sqrt{(b(a+b))} = x$ C.D.T.

Problema XXI.

Trasformare un triangolo equilatero in un quadrato. (Fig. 21.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Sia ABC (Fig. 21.ª) il triangolo equilatero dato. Abbassata la perpendicolare CL sarà (n.° 101 lib. 1.°)

$$(AC)^2 = (AL)^2 + (LC)^2$$

Sottraendo $(AL)^2$, ordinando per $(LC)^2$, e prendendo la radice positiva sarà

$$LC = \sqrt{\{(AC)^2 - (AL)^2\}} \qquad (\varphi)$$

Fatto a il lato del triangolo equilatero sarà $AC = a$, $AL = \frac{a}{2}$. Sostituiti questi valori in (φ) si otterrà

$$LC = \sqrt{\left(a^2 - \frac{a^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{4a^2 - a^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{3a^2}{4}\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Conseguentemente l'area del triangolo sarà (n.° 423 lib. 9.°)

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Chiamato x il lato del chiesto quadrato si avrà per condizione del problema

$$x^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Ed estraendo la radice $x = \sqrt{\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3a^2}}{4}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(a\sqrt{3a^2}\right)}$

Costruzione

Si prolunghi AB indefinitivamente. Prendasi $AD = 3AB = 3a$; quindi si assuma DB per diametro, e si descriva il corrispondente semicerchio. Dal punto A si alzi AE perpendicolare sino alla periferia. Si avrà (n.° 120 lib. 2.°)

$$(AE)^2 = DA \cdot AB$$

Analiticamente. . . . . $(AE)^2 = 3a \cdot a = 3a^2$

E presa la radice positiva . . . . $AE = \sqrt{3a^2}$

Prendasi $AF = AE = \sqrt{3a^2}$, e presa FB per diametro si costruisca il corrispondente semicerchio. Si avrà pure (luogo citato)

$$(AG)^2 = FA \cdot AB$$

Analiticamente . . . . . $(AG)^2 = a\sqrt{3a^2}$

Presa la radice positiva . . $AG=\sqrt{(a\sqrt{3a^2})}$
Tagliando per mezzo la retta AG in H si otterrà

$$AH=\frac{1}{2}\sqrt{(a\sqrt{3a^2})}=x$$

Dunque fatto il quadrato di HA riuscirà questo in area eguale al dato triangolo equilatero. C. D. F.

Problema XXII.

Data una retta costruire sopra di essa un triangolo isoscele, che abbia gli angoli alla base doppj ciascuno dell'angolo al vertice (Fig. 22.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Sia AB (Fig. 22.ª n.° 1.°) la data retta, e suppongasi ABC il triangolo cercato, in cui abbiasi $AC=CB$, e gli angoli CAB, CBA doppj ciascuno dell'angolo ACB. Dividasi per metà l'angolo ABC colla BD prodotta ad incontrare la retta CA. Si avranno eguali gli angoli DBC, e DCB, e quindi il triangolo DCB sarà isoscele. Parimenti sarà tale anche il triangolo ADB, perchè l'angolo ADB esterno, ove riferiscasi al triangolo DCB (n.° 76 lib. 1.°) sarà eguale all'angolo CAB, essendo ambedue il doppio dell'angolo DCB. Si avrà pertanto $BD=BA=DC$
Facciasi ora $AB=a$; $AC=x$. Sarà $DC=a$, e $DA=AC-DC=x-a$
Pei tre punti D, C, B facciasi passare un cerchio. Riuscirà AB tangente ad esso (n.° 162 lib. 3.°), e quindi (n.° 166 lib. 3.°) si avrà

$$AC\,.\,AD=(AB)^2$$

Analiticamente. . . . . $x(x-a)=a^2$
1.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 2.° Si compisca il quadrato del 1.° membro. 3.° Si estragga la radice. 4.° Si aggiunga $\frac{a}{2}$, e sarà

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5a^2}{4}\right)}=\frac{a\pm a\sqrt{5}}{2}$$

Costruzione

Presa una retta $EF=AB=a$ (Fig. 22.ª n. 2.°) si alzi dall'estremità E una perpendicolare $EG=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$, e si congiungano i punti

F, G colla retta FG, che si prolunghi poscia in H, onde sia $GH = GE = \frac{a}{2}$. Lo stesso si faccia dall'altra estremità, talchè si abbia la $EM = FH$. Fatto centro in F col raggio FH, e in E col raggio EM si descrivano due archi di cerchio. Dal punto P della loro intersecazione ai punti E, F si guidino le rette PE, PF, ed avrassi il triangolo EPF, che sarà il ricercato; ossia, ch' è poi lo stesso, avrà PE il valore trovato per x nella supposizione, che il triangolo così costruito abbia soddisfatto alle condizioni del problema. Si ha infatti $PE = ME$, raggi dello stesso cerchio, e per essere $EM = FH$ sarà $PE = FH = HG + GF$. Inoltre si ha l'equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(FG)^2 = (FE)^2 + (GE)^2$$

Analiticamente . . . . . $(FG)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

Presa la radice. . . . . $FG = \pm\sqrt{\left(\frac{5a^2}{4}\right)} = \pm\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Sostituiti a PE i valori di HG, e di GF sarà

$$PE = \frac{a}{2} \pm \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2} = x \qquad \text{C. D. T.}$$

Problema XXIII.

Dato un cerchio, ed un punto esterno, la cui distanza dal cerchio sia minore del diametro, cercasi di condurre da esso punto nel cerchio una secante tale, che la parte interna sia eguale alla tangente condotta dal punto dato al cerchio. (Fig. 23.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Sia A (Fig. 23.ª n.° 1.°) il punto esterno. Vuolsi condurre al dato cerchio la segante AB tale, che la parte interna BD sia eguale alla tangente AC. Questa si faccia a, e sia $AD = x$. Riuscirà $AB = AD + BD = a + x$. Supposto sciolto il problema si avrà l'equazione (n.° 166 lib. 3.°)

$$(AC)^2 = AB \,.\, AD$$

Analiticamente . . . . . $a^2 = (a + x)x$

1.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 2.° Si ordini per x. 3.° Si com-

pisca il quadrato. 4.° Si estragga la radice quadrata. 5.° Si sottragga $\frac{a}{2}$, e si otterrà

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(a\left(a + \frac{a}{4}\right)\right)}$$

Costruzione

Per costruire il valore della x si cerchi primamente la linea $a + \frac{a}{4}$. Si divida (Fig. 23.ª n.° 2.°) la linea AC per mezzo in M, e la MC dividasi essa pure per mezzo in E. Sarà $EC = \frac{a}{4}$. Dal punto C si addatti sulla circonferenza la corda $CF = CE$, e si prolunghi in G per modo, che sia $FG = AC = a$; sarà la retta $CG = a + \frac{a}{4}$. Dal punto G si tiri al cerchio la tangente GH. Sarà (luogo citato)

$$(GH)^2 = GC \,.\, GF$$

Analiticamente . . . . . $(GH)^2 = a\left(a + \frac{a}{4}\right)$

E presa la radice . . . . . $GH = \pm\sqrt{\left(a\left(a + \frac{a}{4}\right)\right)}$

Tolgasi da GH la retta $LH = AM = \frac{a}{2}$, e la restante sarà

$$GL = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(a\left(a + \frac{a}{4}\right)\right)}$$

Dunque sulla retta AC presa la parte $AN = GL$, fatto centro in A, coll' intervallo AN descritto un arco, che tagli la circonferenza del cerchio in D, uniti i punti A, D colla retta AD, e prolungata questa in B sino alla periferia, sarà AB la chiesta secante. C. D. T.

Osservazione

Questo problema ha due secanti, che possono soddisfarlo, le quali sono la AB, e la KA tirata per l' altro punto, in cui l' archetto ultimamente descritto taglia la circonferenza; si ha infatti (n.° 138 lib. 3.°), che dato un punto esterno ad un cerchio si possono da quel punto tirare nel cerchio due seganti eguali: ma però due sole, e non più.

Problema XXIV.

Sulla perpendicolare abbassata dal vertice di un triangolo qualunque sopra la base, trovare un punto, pel quale condotta un retta parallella alla base istessa, rimanga il triangolo diviso per metà. (Fig. 24.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Sia ABC (Fig. 24.ª) il triangolo, e suppongasi E il punto chiesto sulla perpendicolare AD. Facciasi $AD = a$; $BC = b$; $AE = x$. Pe' triangoli simili AFG, ABC si avrà la proporzione (n.° 234. lib. 5.°)

$$BC : FG :: AB : AF \qquad (M)$$

E pe' triangoli simili BAD, FAE si avrà quest' altra proporzione

$$AB : AF :: AD : AE \qquad (N)$$

Paragonando (M), ed (N) sarà $BC : FG :: AD : AE$

Analiticamente . . . . . $b : FG :: a : x$

Fatto il prodotto degli estremi, e diviso pel 3.° termine si avrà $FG = \frac{bx}{a}$

Sarà poi (n.° 423. lib. 9.°) . . Superf. $AFG = \frac{bx}{a} \times \frac{x}{2} = \frac{bx^2}{2a}$

Superf. $ABC = b \times \frac{a}{2} = \frac{ab}{2}$

Ma il triangolo AFG debb' essere per condizione del problema eguale al triangolo ABC. Dunque si avrà l' equazione

$$\frac{bx^2}{2a} = \frac{ab}{4}$$

1.° Dividasi per $\frac{b}{2}$. 2.° Si moltiplichi per a. 3.° Si prenda la radice positiva, e sarà

$$x = \sqrt{\left(\frac{a^2}{2}\right)}$$

Costruzione

Si divida per mezzo l' altezza AD nel punto M, ed a questo punto si alzi la perpendicolare $MH = AM$. Si congiungano i punti H, A colla HA. Facciasi centro in A, e coll' intervallo AH si descriva un arco, che

taglierà la perpendicolare AD in un punto E. Il punto E così determinato sarà il cercato. Si ha infatti (n.° 101 lib. 1.°)

$$(AH)^2=(AM)^2+(MH)^2=(AM)^2+(AM)^2=2(AM)^2$$

Analiticamente . . . . . $(AH)^2=2\times\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$

Presa la radice positiva si avrà $AH=\sqrt{\left(\frac{a^2}{2}\right)}=x$ C. D. T.

Osservazione I.ª

Nel valore trovato per la x non avendosi, che quello della perpendicolare abbassata dal vertice, chiaramente si vede, che il problema potrà in eguale maniera risolversi anche nel caso, che fosse incognita l'area del triangolo.

Osservazione II.ª

Nella 2.ª delle accennate operazioni per semplificare l'incognita si è trovato essere $x^2=\frac{a^2}{2}$. Posta questa equazione in proporzione sarà

$$a : x :: x : \frac{a}{2}$$

Da questa proporzione si raccoglierà essere x media proporzionale tra la perpendicolare, e la metà di essa perpendicolare. Inoltre essendosi trovata $FG=\frac{bx}{a}$, sostituito ad x il suo valore diventerà

$$FG=\frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{a^2}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{2a^2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)}$$

Quadrando sarà. . . . . $(FG)^2=\frac{b^2}{2}=b\,.\,\frac{b}{2}$

Posta questa equazione in proporzione sarà

$$b : FG :: FG : \frac{b}{2}$$

Dalla quale si conchiuderà essere FG media proporzionale tra la base, e la metà della base. Dunque diviso un triangolo per metà con una retta parallela alla base, questa retta sarà media proporzionale fra la base, e la sua metà; e l'altezza del triangolo, che n'emerge, sarà media proporzionale fra l'altezza del triangolo dato, e la sua metà.

Problema XXV.

Data una retta trovare sulla sua direzione un punto tale, che la sua distanza da un estremo sia media proporzionale tra la data retta, ed il segmento determinato dalla distanza, che passa tra esso punto, e l'altro estremo della retta data. (Fig. 25.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Data la retta AB (Fig. 25.ª) si vuol trovare sulla sua direzione un punto C tale, che la distanza AC sia media proporzionale tra AB, e CB. Facciasi $AB = a$; $AC = x$. Sarà $BC = AB - AC = a - x$
Per condizione del problema si avrà la proporzione

$$AB : AC :: AC : BC$$

Analiticamente . . . . . $a : x :: x : a - x$
1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si aggiunga ax. 3.° Si quadri il 1.° membro dell'equazione. 4.° Si estragga la radice. 5.° Si sottragga $\frac{a}{2}$, e si avrà

$$x = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

Costruzione

Per costruire questo valore s'innalzi a perpendicolare BD, che si assuma eguale alla metà di AB. Sarà $BD = \frac{a}{2}$. Fatto centro in D, e presa per raggio BD si descriva l'arco di cerchio OBO'. Dal punto D al punto A si guidi la retta DA. Avrassi (n.° 101 lib. 1.°)

$$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2 \qquad (\varphi)$$

Analiticamente . . . . . $(AD)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 + a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$
Prendendo la radice per ora col solo segno positivo si avrà

$$AD = \sqrt{\left(\frac{5a^2}{4}\right)} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Ciò posto; per ottenere la soluzione del problema l'operazione si ridurrà a togliere da AD la retta BD, onde avere una retta, che uguagli x. Per

costruzione abbiamo DB = DO. Dunque se da AD si toglierà DO sarà lo stesso, che toglierví BD, ed avrassi perciò

$$AO = AD - OD = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} = x$$

Dunque se si porterà AO fissa in A da A in C verso B, il punto C così determinato sarà il cercato.

Questa costruzione varrebbe ancora, ove si assumesse il segno negativo nella radice, che si prende pe' valori analitici dell'equazione (φ). Vogliasi infatti costruire al presente il valore della x preso il segno negativo. Si sostituisca a BD la retta DO', che parimenti è raggio dello stesso cerchio, e sarà la retta $AO' = \frac{a + a\sqrt{5}}{2}$. Ma il valore della x, preso il segno negativo, è composto degli stessi termini di quello, cui eguaglia la quantità AO', colla sola differenza, ch'è tutto negativo, per essere $-\left(\frac{a + a\sqrt{5}}{2}\right)$. Dunque AO' si potrà riguardare come il secondo valore della x, la quale x essendo negativa, se trasporterassi AO' fissa in A da A verso C' sopra la retta AB prolungata dalla parte opposta a quella, su cui si è preso il punto C nella prima soluzione, avrassi un secondo punto C', la cui distanza dal punto A sarebbe tale, che si verificherebbe sempre AC' media proporzionale tra BC', ed AB. C. D. T.

Problema XXVI.

Data una retta eguale alla somma del lato d'un quadrato, e della sua diagonale, trovare il quadrato. (Fig. 26.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Sia a la retta eguale alla somma data, x il lato del quadrato, ed y la diagonale. Il quadrato della diagonale di un quadrato è doppio di quello del lato (n.° 101 lib. 1.°), e quindi si ha

$$y^2 = 2x^2 \qquad (\varphi)$$

Inoltre si ha per condizione del problema la seguente equazione

$$x + y = a \qquad (\varphi')$$

Prendendo la radice positiva in (φ) . . . . $y = \sqrt{2x^2}$

Sostituendo questo valore in (φ') . . . . . $x + \sqrt{2x^2} = a$

1.° Si sottragga x a questa equazione. 2.° Si quadri l'equazione, che ne risulta. 3.° Si sottragga x^2. 4.° Si aggiunga $2ax$. 5.° Si compisca il quadrato. 6.° Si prenda la radice positiva. 7.° Si sottragga a, e sarà

$$x = -a + a\sqrt{2}$$

Costruzione

Rappresenti AB (Fig. 26.ª) la retta eguale alla data somma, e si avrà $AB = a$. Dal punto B si alzi la perpendicolare $BC = AB$, e si congiungano i punti C, A colla retta CA. Preso il punto A per centro, ed AB per raggio si descriva l'arco BD, che taglierà la retta CA nel punto D. Se sulla CD così determinata costruirassi il suo quadrato, sarà esso il ricercato. Infatti abbiamo (n.° 101 lib. 1.°)

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

Ma $AB = BC$. Dunque sarà pure.. $(AC)^2 = 2(AB)^2$

Analiticamente . . . . . $(AC)^2 = 2a^2$

Presa la radice positiva . . . . . $AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

Per essere poi, come raggi dello stesso cerchio, $AD = AB$ si avrà finalmente

$$CD = AC - AD = AC - AB = a\sqrt{2} - a = x \qquad \text{C. D. T.}$$

Osservazione

Da questo problema si può raccogliere, che data una retta qualunque, se su di essa costruiscasi un quadrato, la differenza tra la diagonale di questo quadrato, e il lato di esso, sarà eguale al lato di un quadrato, in cui la somma della diagonale, e del lato rappresenti la retta data.

Problema XXVII.

Data una retta, e un punto in un cerchio far passare per esso una corda eguale alla data retta. (Fig. 27.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Sia PQ (Fig. 27.ª n.° 1.°) la data retta, ed E (Fig. 27.ª n.° 2.°) il punto dato nel cerchio ABCD. Si vuol far passare per esso una corda

eguale a PQ. Suppongasi essere DC questa corda. Conducasi un diametro AB, che passi pel punto E. Sia $DC = PQ = a$. Per essere dato il cerchio è cognito il suo diametro, e quindi restano cogniti ancora i suoi segmenti; onde si potrà assumere $AE = b$; $EB = c$. Sia $EC = x$. Sarà $DE = DC - EC = a - x$. E si otterrà l'equazione (n.° 165 lib. 3.°)

$$AE \,.\, EB = DE \,.\, EC$$

Analiticamente. . . . . $b \,.\, c = (a - x)\,x$

1.° Si eseguiscano le accennate moltipliche. 2.° Si aggiunga x^2, e si sottragga bc, ed ax. 3.° Si compisca il quadrato. 4.° Si estragga la radice. 5.° Si aggiunga $\frac{a}{2}$, e si otterrà

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - bc\right)}$$

Costruzione

Pel punto E (Fig. 27.ª n.° 3.°) condotto il diametro AB s'innalzi da esso punto alla periferia la normale EF, e si avrà (n.° 120 lib. 2.°)

$$(EF)^2 = AE \,.\, EB$$

Analiticamente . . . . . $(EF)^2 = bc$

Fatto centro in F con un raggio $FG = \frac{PQ}{2} = \frac{a}{2}$ si tagli la EB in G, e si otterrà l'altra equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(EG)^2 = (FG)^2 - (FE)^2$$

Analiticamente. . . . . $(EG)^2 = \frac{a^2}{4} - bc$

E presa la radice . . . . $EG = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - bc\right)}$

Ora fatto centro in G collo stesso raggio GF si seghi la EB in H, e si avrà

$$EH = GH + EG = GF + EG = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - bc\right)}$$

Fatto centro finalmente in E con un raggio EH si seghi l'arco AFB in L. Da questo punto così determinato condotta pel punto E la retta LR sarà questa la corda eguale alla data PQ, avendosi

$$LE = EH = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - bc\right)} = x \qquad \text{C. D. T.}$$

Osservazione

In due casi sarebbe stata impossibile la soluzione di questo problema. Primamente se la data PQ fosse stata maggiore del diametro del dato cerchio, non potendosi allora inscrivere nel cerchio. Secondariamente se fatto centro in F col raggio $FG = \frac{a}{2}$ non si avesse potuto segare la retta EB, cioè se fosse stato $\frac{a^2}{4} < bc$, come la formola istessa trovata per la x lo indica, perchè in questo caso la quantità sotto il vincolo radicale sarebbe stata immaginaria.

Problema XXVIII.

Date tre rette, di cui una sia sempre minore della somma delle altre due, costruirne un triangolo. (Fig. 28.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Sieno date (Fig. 28.ª n.° 1.°) le rette a, b, c aventi la condizione espressa nel problema, e si supponga già formato il triangolo ABC. Dal vertice A si abbassi la perpendicolare AD. Si avrà l'equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(CA)^2 = (CD)^2 + (AD)^2 \qquad (\varphi)$$

Facciasi $CB = a$; $CA = b$; $AB = c$; $AD = x$; $CD = y$

Sostituiti i valori analitici nell'equazione (φ) si otterrà

$$x^2 + y^2 = b^2 \qquad (q)$$

Si avrà inoltre $DB = CB - CD = a - y$

Quindi sostituiti i valori analitici nella equazione, che si ha dal triangolo rettangolo ABD, cioè $(AB)^2 = (AD)^2 + (DB)^2$ si avrà

$$x^2 + (a - y)^2 = c^2$$

1.° Eseguiscasi l'accennato quadrato. 2.° Si sottragga a^2. 3.° Si aggiunga $2ay$, e si avrà

$$x^2 + y^2 = c^2 + 2ay - a^2$$

4.° Al 1.° membro sostituiscasi il valore trovato in (q). 5.° Si sottragga c^2. 6.° Si aggiunga a^2. 7.° Si ordini per y. 8.° Si divida per 2, e sarà

$$y = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a} \qquad (\lambda)$$

Ora in (q) si sottragga y^2, e si avrà . . . $x^2 = b^2 - y^2$. E sostituito in questa equazione il valore trovato in (λ), dopo averlo quadrato, si otterrà

$$x^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

Presa la radice positiva si avrà finalmente $x = \sqrt{\left\{b^2 - \left(\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2\right\}}$ (λ')

Costruzione

Per costruire i valori (λ), e (λ') si faccia (Fig. 28.ª n.° 2.°) $AB = a$, e ad essa s'innalzi la perpendicolare $AC = b$. Si congiungano i punti C, B colla retta CB, e presa CB per diametro si descriva il semicerchio CDB. Dal punto C s'inscriva nel semicerchio la retta $CD = c$, e quindi si uniscano i punti D, B colla retta DB. Si avrà l'equazione (luogo citato)

$$(CB)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$

Analiticamente . . . . . $(CB)^2 = a^2 + b^2$ (m)

Si avrà pure quest' altra equazione

$$(BD)^2 = (CB)^2 - (DC)^2$$

Analiticamente . . . . . $(BD)^2 = a^2 + b^2 - c^2$

Ora dal punto D si abbassi la ED perpendicolare a CB, e si prolunghi CB in modo, che riesca $BF = 2AB = 2a$. Si prolunghi ancora AB, talchè sia $BG = BC$; quindi si congiungano i punti F, G colla retta FG. Dal punto E si guidi sul lato AB la retta EH parallela ad FG. Per essere BD media proporzionale tra CB, e BE (n.° 245 lib. 5.°) si avrà

$$BE : BD :: BD : CB$$

e quindi . . . . . $BE = \frac{(BD)^2}{CB}$

E sostituiti i valori analitici, presa la radice positiva in (m), si avrà

$$BE = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$$

Pe' triangoli simili BEH, BFG si avrà la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$BF : GB :: BE : BH$$

Analiticamente . . . . . $2a : \sqrt{(a^2 + b^2)} :: \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} : BH$

Conseguentemente sarà $BH = \left\{ \frac{1}{2a} \sqrt{(a^2 + b^2)} \right\} \left\{ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \right\} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = y$

Finalmente col centro B, e coll'intervallo $BL = AC = b$ descritto l'arco LM, pel punto H si conduca HM parallela ad AC. Il punto M, in cui la HM taglia l'arco LM unito coi punti A, e B formerà il triangolo MAB, che sarà il cercato. Nel triangolo infatti MHB (luogo citato) si ha l'equazione

$$(MH)^2 = (MB)^2 - (BH)^2$$

Analiticamente . . . . . $(MH)^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2$

E presa la radice sarà $HM = \sqrt{\left\{ b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2 \right\}} = x$ C. D. T.

Problema XXIX.

Sopra una data retta, come sopra ipotenusa, costruire un triangolo rettangolo tale, che, prolungato un cateto in modo, che il suo prolungamento sia eguale alla data ipotenusa, si abbia il quadrato di tutta questa retta contenente il cateto, ed il suo prolungamento, che stia al quadrato dell'altro cateto nella ragione di due rette date. (Fig. 29.ª tav. 2.ª)

Soluzione

La data retta sia $AB = a$ (Fig. 29.ª n.° 1.°); il cateto $AC = x$. Vuolsi prolungare AC per modo in D, che preso $AD = AC + AB = x + a$, il quadrato di AD stia al quadrato dell'altro cateto CB nella ragione di due rette per esemp.° di $m : n$, nella supposizione, che il problema sia sciolto, e che il chiesto triangolo rettangolo sia ACB. Si avrà (n.° 101 lib. 1.°)

$$(CB)^2 = (AB)^2 - (AC)^2$$

Analiticamente . . . . . $(CB)^2 = a^2 - x^2$

Per condizione del problema si avrà la proporzione

$$(AD)^2 : (CB)^2 :: m : n \qquad (\lambda)$$

Analiticamente . . . . . $(a + x)^2 : a^2 - x^2 :: m : n$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si eseguisca l'accennato quadrato. 3.° Si aggiunga mx^2. 4.° Si sottragga na^2. 5.° Si ponga

la x^2 sotto un solo coefficiente. 6.° Si divida per questo coefficiente, e si avrà

$$x^2 + \frac{2anx}{m+n} = a^2\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$$

7.° Si compisca il quadrato del 1.° membro, e sarà

$$x^2 + \frac{2anx}{m+n} + \frac{a^2n^2}{(m+n)^2} = \frac{a^2n^2}{(m+n)^2} + a^2\left(\frac{m-n}{m+n}\right) \qquad (\varphi)$$

8.° Moltiplicando, e dividendo il termine $a^2\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$ per $m+n$ il 2.° membro dell'equazione si riduce ad essere

$$a^2\left(\frac{(m-n)(m+n)+n^2}{(m+n)^2}\right) = a^2\left(\frac{m^2-n^2+n^2}{(m+n)^2}\right) = \frac{a^2m^2}{(m+n)^2}$$

9.° Sarà quindi l'equazione (φ) ridotta alla seguente forma

$$x^2 + \left(\frac{2an}{m+n}\right)x + \frac{a^2n^2}{(m+n)^2} = \frac{a^2m^2}{(m+n)^2}$$

10.° Si estragga la radice presa positivamente. 11.° Si sottragga $\frac{an}{m+n}$, e sarà

$$x = \frac{-an+am}{m+n} = a\left(\frac{m-n}{m+n}\right).$$

Costruzione

Prendasi (Fig. 29.ª n.° 2.°) sulla retta AB la retta $AE = m+n$, ed applicata al punto A con un angolo qualunque una retta indefinita AK si prenda su di essa $AF = m-n$; quindi si uniscano i punti F, E colla retta FE. Si tiri parallela ad FE dal punto B la retta BG. La retta AG così determinata darà il chiesto cateto. Pe' triangoli simili infatti GAB, AFE si avrà la proporzione (n.° 231 lib. 5.°)

$$AE : AB :: AF : AG$$

Analiticamente . . . . . $m+n : a :: m-n : AG = a\left(\frac{m-n}{m+n}\right) = x$

Si costruisca pertanto sulla retta AB il suo corrispondente semicerchio, presa AB per diametro, e quindi fatto centro in A coll'intervallo AG per raggio si descriva un arco GC, che seghi in C il semicerchio, tirata la CA eguale ad HG, perchè raggi dello stesso cerchio, sarà essa il cateto cercato del triangolo rettangolo ACB. C. D. T.

Osservazione

Aggiunta alla retta CA (Fig. 29.ª n.° 2.°) per diritto una retta $CD = AB$, e uniti i punti D, B colla DB si ha il teorema, che la doppia area del triangolo ADB sta al quadrato dell' altro cateto CB come m alla media proporzionale tra m, ed n. Per dimostrare questa verità si moltiplichi la 1.ª ragione della proporzione (λ) per $(CB)^2$, e la 2.ª per m; si avrà quest' altra proporzione

$$(AD)^2 \times (CB)^2 : (CB)^4 :: m^2 : mn$$

Ed estraendo la radice positiva in ogni termine sarà

$$AD \,.\, CB : (CB)^2 :: m : \sqrt{mn}$$

Ma AD . CB è il doppio dell' area del triangolo ADB (n.° 423 lib. 9.°), $(CB)^2$ è il quadrato dell' altro cateto, di cui si parla, e l' espressione $\sqrt{mn}$ è la media proporzionale tra le due rette m, ed n. Dunque è dimostrato l' accennato teorema.

Problema XXX.

Costruire un triangolo equilatero, la cui area sia eguale ad un dato quadrato. (Fig. 30.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Sia BAC (Fig. 30.ª) il triangolo equilatero, di cui si cerca, e sia $(CN)^2 = a^2$ il quadrato proposto. Dal vertice A si abbassi la perpendicolare AD sulla base BC. Per la natura de' triangoli isosceli, fra' quali sta pure l' equilatero, la base BC sarà tagliata per mezzo in D (Può servire il n.° 52 lib. 1.° per dimostrare questa verità). Se dunque farassi $DC = x$, sarà $BC = BA = AC = 2x$. Ora nel triangolo rettangolo ADC si ha (n.° 101 lib. 1.°)

$$(AD)^2 = (AC)^2 - (DC)^2$$

Analiticamente. . . . . $(AD)^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2$

Presa la radice positiva . . $AD = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$

L' area del triangolo BAC è $AD \,.\, BD = x \,.\, x\sqrt{3} = x^2\sqrt{3}$ (n. 423 lib. 9.°)

Ma per condizione del problema quest' area debb' essere eguale ad a^2. Dunque si avrà l' equazione

$$x^2\sqrt{3}=a$$

1.° Si divida per $\sqrt{3}$. 2.° Si prenda la radice positiva, e sarà

$$x=\sqrt{\left(\frac{a^2}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt[4]{3}}$$

3.° Si moltiplichi $\sqrt{a^2}$ per a; quindi $\sqrt[4]{3}$ per a^2, e senza punto alterare la frazione si avrà

$$x=\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{3a^2}}$$

Costruzione

Si prolunghi CN in G, cosicchè riesca $NG=3CN=3a$. Presa tutta la CG per diametro si descriva il corrispondente semicerchio. Dal punto N s' alzi alla periferia la normale NM. Sarà (n.° 120 lib. 2.°)

$$(NM)^2=GN\,.\,CN$$

Analiticamente . . . . . $(MN)^2=3a\,.\,a=3a^2$

Presa la radice positiva . . . $MN=\sqrt{3a^2}=a\sqrt{3}$

Sopra CG partendo dal punto N prendasi una porzione $QN=NM$, e assunta QC per diametro vi si descriva sopra il suo semicerchio corrispondente. Questo taglierà in un punto F la perpendicolare NM. Da F a C si tiri la FC. Poi nel punto C ad angolo qualunque si applichi una retta indefinita CP, su di essa si prenda $CH=NF$, e $CK=CF$. Sulla retta CF si segni la retta $CL=CN$. Dal punto L al punto H si guidi la retta LH, e dal punto K si meni parallela a LH la retta KE sul lato FC. Dal punto E si abbassi ED perpendicolare ad NC, sarà $ED=NC$. Infatti pe' triangoli simili LCH, ECK si ha la proporzione (n.° 231 lib. 5.°)

$$CK : CH :: CE : CL$$

E pe' triangoli simili FCN, DCE si avrà quest' altra proporzione

$$CF : FN :: CE : ED$$

Ma in queste due proporzioni abbiamo per costruzione CE comune; e $CK=CF$; $CH=FN$. Dunque sarà pure necessariamente $LC=ED$. Ma $LC=NC$ per costruzione. Dunque $NC=ED$. Ora si ha (luogo citato)

$$(NF)^2=QN\,.\,NC$$

Dunque posta in proporzione questa equazione si avrà

$$QN : NF :: NF : NC$$

Moltiplicando per NF gli antecedenti, e per NC i conseguenti sarà

$$QN . NF : NF . NC :: (NF)^2 : (NC)^2$$

Ma si è dimostrato NC = ED. Dunque sostituita questa linea sarà pure

$$QN . NF : NF . NC :: (NF)^2 : (ED)^2$$

Dividendo per NF la 1.ª ragione. . $QN : NC :: (NF)^2 (ED)^2$ (π)

Ne' due triangoli simili NCF, DCE si ha (n.° 234 lib. 5.°)

$$NF : ED :: NC : DC$$

Quadrando . . . . . $(NF)^2 : (ED)^2 :: (NC)^2 : (DC)^2$ (π')

Paragonando (π), e (π') . . $QN : NC :: (NC)^2 : (DC)^2$

Analiticamente . . . . . $a\sqrt{3} : a :: a^2 : (DC)^2 = \frac{a^3}{a\sqrt{3}} = \frac{a^3}{\sqrt{3a^2}}$

E presa la radice positiva . . . $DC = \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{3a^2}} = x$ C. D. T.

Problema XXXI.

Data la retta indefinita NZ, e dati in essa tre punti N, A, K, se ne cerca un quarto M tale, che sia MN terza proporzionale dopo NK, ed AM. (Fig. 31.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Essendo dati i punti N, A, K (Fig. 31.ª) saranno cogniti i corrispondenti segmenti.

Facciasi perciò $AN = a$; $AK = b$; e sia $KM = x$

Sarà $NK = NA + AK = a + b$; $AM = AK + KM = b + x$; $NM = NA + AM = a + b + x$

Ma per condizione del problema la NM debb'essere terza proporzionale dopo NK, ed AM. Dunque si avrà l' analogia

$$NK : AM :: AM : MN$$

Analiticamente . . . $a + b : b + x :: b + x : a + b + x$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si sottragga bx, b^2,

ed ax. 3.° Si compisca il quadrato del 1.° membro. 4.° Si estragga la radice, e sarà

$$x+\left(\frac{b-a}{2}\right)=\pm\sqrt{\left\{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+a^2+2ab\right\}}$$

5.° Si eseguisca l'accennato quadrato. 6.° Ridotti tutti i termini allo stesso denominatore, e sottratto $\left(\frac{b-a}{2}\right)$ si avrà

$$x=\frac{-b+a\pm\sqrt{(b^2+6ab+5a^2)}}{2}$$

7.° E riducendo la formola sotto il radicale ad espressione più elegante, e più semplice a costruirsi sarà finalmente

$$x=\frac{1}{2}\left\{a-b\pm\sqrt{\left((b+5a)(b+a)\right)}\right\}$$

Costruzione

Per costruire questo valore si cominci a prendere una retta, che sia eguale alla quantità $\sqrt{\left((b+5a)(b+a)\right)}$, la quale, com'è chiaro, rappresenta un rettangolo. Per poterne estrarre attualmente la radice bisogna renderla eguale ad un quadrato. A tale oggetto si produca AK in Q, talchè sia $KQ=AN=a$. Riuscirà $AQ=AK+KQ=b+a$. Prendasi quindi sopra AN la porzione $AS=AK=b$, e si produca AS in F per modo, che sia $SF=5a$. Sarà $AF=AS+SF=b+5a$. Ora si assuma FQ per diametro, e si descriva il semicerchio FPQ. Dal punto A si alzi la normale AH, e si avrà l'equazione (n.° 120 lib. 2.°)

$$(AH)^2=AF\,.\,AQ$$

Analiticamente . . . . . $(AH)^2=(b+5a)(b+a)$

Presa la radice. . . . . $AH=\pm\sqrt{\left((b+5a)(b+a)\right)}$

Si produca ora AH in n, onde sia $An=a$, e da An si levi $nk=b$, resterà $Ak=a-b$, e quindi $Hk=Ak+AH=a-b\pm\sqrt{\left((b+5a)(b+a)\right)}$. Prendasi finalmente la metà della retta Hk, ed avrassi una retta eguale al valore trovato per la x, cioè $\frac{1}{2}\left\{a-b\pm\sqrt{\left((b+5a)(b+a)\right)}\right\}$.

Dunque se si farà $KM=\frac{1}{2}Hk$ si avrà in M il punto chiesto, soddisfacendo così la KM alle condizioni del problema. C. D. F.

Problema XXXII.

In un triangolo qualunque trovare un punto, dal quale condotte due parallele ai lati adjacenti, ed una retta al vertice, rimanga esso triangolo diviso in tre parti eguali, cioè in due trapezj, ed in un piccolo triangolo simile al dato. (Fig. 32.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Sia dato il triangolo ABC (Fig. 32.ª), e si supponga E il punto chiesto, di maniera che condotte le parallele ED, EF ai lati AB, AC, e la AE al vertice sia il trapezio AEDB = AEFC, e ciascuno di essi eguale al triangolo EDF simile al dato. Dai punti D, e C sulla retta AB si abbassino le perpendicolari DG, CH.

Facciasi $AB = a$; $BC = b$; $CH = c$; e sia $BD = x$; $DE = y$

Pe' triangoli simili BDG, BCH si avrà (n.° 234 lib. 5.°)

$$BD : GD :: BC : CH$$

Analiticamente . . . . . $x : GD :: b : c$

Fatto il prodotto degli estremi, e diviso pel 3.° termine sarà

$$GD = \frac{cx}{b}$$

Ma la superficie d'un trapezio a lati paralleli è uguale alla semisomma de' lati paralleli moltiplicata nell' altezza. (n.° 398 lib. 8.°) Dunque si avrà

$$\text{Superf. AEDB} = \left(\frac{ED + AB}{2}\right) \times GD$$

Analiticamente . . . Superf. AEDB $= \left(\frac{y + a}{2}\right) \times \frac{cx}{b}$

Ma questo trapezio deve uguagliare il terzo della superficie del triangolo ABC, cioè il terzo di $\frac{AB \,.\, HC}{2}$ (n.° 423 lib. 9.°), ossia analiticamente il terzo di $\frac{ac}{2}$. Dunque si avrà l'equazione

$$\left(\frac{y + a}{2}\right) \times \frac{cx}{b} = \frac{ac}{6}$$

1.° Si divida per c. 2.° Quindi si moltiplichi per $6b$. 3.° Si divida per $3(y + a)$, e sarà

$$x = \frac{ab}{3(y + a)}$$

Per essere poi ED parallela ad AB, e EF ad AC il triangolo EDF sarà simile al triangolo BAC, e quindi si otterrà (n.° 254 lib. 5.°)

$$\text{Superf. EDF} : \text{Superf. ABC} :: (\text{ED})^2 : (\text{AB})^2$$

Analiticamente . . . . . Superf. EDF : $\frac{ac}{2} :: y^2 : a^2$

Fatto il prodotto de' medj, e diviso per l'ultimo termine sarà

$$\text{Superf. EDF} = \frac{acy^2}{2a^2} = \frac{cy^2}{2a}$$

Ma la superficie del triangolo EDF debb' essere uguale ad un terzo della superficie del triangolo ABC, cioè ad $\frac{ac}{6}$. Dunque si avrà quest'altra equazione

$$\frac{cy^2}{2a} = \frac{ac}{6}$$

1.° Si divida per c. 2.° Si moltiplichi per $2a$. 3.° Si prenda la radice positiva, e sarà

$$y = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)} = \sqrt{\left(a \cdot \frac{a}{3}\right)}$$

Costruzione

Per costruire il valore della y, da cui dipende quello della x, si divida la retta AB in tre parti eguali ne' punti L, K (n.° 246 lib. 5.°), e su di essa, come diametro, descrivasi il semicerchio corrispondente. Dal punto K innalzata alla periferia la normale KM si congiungano i punti M, A colla retta MA. Riuscirà MA media proporzionale tra AB, ed AK (n.° 245 lib. 5.°), onde sarà

$$\text{AB} : \text{AM} :: \text{AM} : \text{AK}$$

Analiticamente. . . . . a : AM :: AM : $\frac{a}{3}$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj, e presa la radice positiva si avrà

$$\text{AM} = \sqrt{\left(a \cdot \frac{a}{3}\right)} = y$$

Si prolunghi ora la retta AB in N, onde abbiasi AN = AM; poi si congiungano i punti N, C colla retta NC, e dal punto L si conduca ad essa

parallela la retta LD. Pei triangoli simili BLD, BNC (luogo citato) si avrà la proporzione

$$BN : BC :: BL : BD$$

Analiticamente. . . . . $a+y : b :: \frac{a}{3} : BD = \frac{ab}{3(a+y)} = x$

Dal punto D finalmente condotta la retta DE parallela ad AB, ed uguale al valore trovato per la y, si congiungano i punti A, E colla retta AE, e si conduca dal punto E la retta EF parallela ad AC. Il triangolo ABC resterà diviso dalle rette DE, AE, EF nella maniera, che corrisponde a tutte le condizioni del problema. C. D. F.

Problema XXXIII.

Trovare la superficie di un triangolo espressa per i tre suoi lati. (Fig. 33.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Sia ABC (Fig. 33.ª n.° 1.°) il triangolo qualunque dato, in cui dal vertice A si abbassi sopra il lato opposto BC una perpendicolare AE. Facciasi $AB = a$; $AC = b$; $BC = c$; $CE = x$; $AE = y$

Si avrà l'equazione (n.° 118 lib. 2.°)

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2BC \,.\, CE$$

Analiticamente . . . . . $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$

1.° Si aggiunga $2cx$. 2.° Si sottragga a^2. 3.° Si divida per $2c$, e si avrà

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \qquad (q)$$

Pel triangolo AEC si ha pure (n. 101 lib. 1.°)

$$(AE)^2 = (AC)^2 - (EC)^2$$

Analiticamente . . . . . $y^2 = b^2 - x^2$

Presa la radice positiva. . . $y = \sqrt{(b^2 - x^2)}$

Sostituito ad x il quadrato del suo valore trovato in (q) si otterrà

$$y = \sqrt{\left(b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2\right)} \qquad (r)$$

Ciò posto; l' area del triangolo ABC sarà (n.° 423 lib. 9.°)

$$\frac{1}{2}(AE \,.\, BC) = \frac{1}{2}(cy) \qquad (M)$$

Moltiplicando ora l'equazione (r) per $\frac{c}{2}$ si avrà

$$\frac{yc}{2}=\frac{c}{2}\sqrt{\left\{b^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2\right\}}=\frac{c}{2}\sqrt{\left\{\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2}\right\}}$$

Portando la quantità $\frac{c}{2}$ sotto il radicale dovrassi moltiplicare la quantità, che ha questo vincolo per $\frac{c^2}{4}$, onde nel denominatore si eliderà la quantità c^2, e sarà semplicemente $4 . 4$, ossia 16. Si avrà pertanto

$$\frac{yc}{2}=\sqrt{\left\{\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{16}\right\}}=\sqrt{\left\{\left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4}\right)\left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4}\right)\right\}}$$

Ed accennando i quadrati, che sono eseguiti in quest' ultima formola sarà

$$\frac{yc}{2}=\sqrt{\left\{\left(\frac{(b+c)^2-a^2}{4}\right)\left(\frac{a^2-(b-c)^2}{4}\right)\right\}}$$

E tornando a decomporre in altra maniera i quadrati si avrà finalmente

$$\frac{yc}{2}=\sqrt{\left\{\left(\frac{b+c+a}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\right\}} \qquad (Q)$$

Ma come si è trovato in (M) l'espressione $\frac{yc}{2}$ rappresenta l'area del triangolo ABC. Dunque l'ultima formola (Q) rappresenterà l' area cercata espressa pei tre lati del triangolo.

Per rendere più semplice questa formola si faccia $a+b+c=p$, e si avrà

$$\frac{b+c-a}{2}=\frac{p}{2}-a\ ;\ \frac{a+b-c}{2}=\frac{p}{2}-c\ ;\ \frac{a-b+c}{2}=\frac{p}{2}-b$$

le quali quantità sostituite nella formola (Q), essa trasformerassi nella seguente

$$\text{Area ABC}=\sqrt{\left\{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)\right\}} \qquad \text{C. D. F.}$$

Osservazione I.ª

Da questa formola si può raccogliere il teorema, che la superficie di un triangolo, di cui sono dati i tre lati è eguale alla radice quadrata del prodotto di quattro fattori, de' quali il primo è la metà del perimetro del triangolo; e gli altri sono i tre resti, che si ottengono dal togliere successivamente ciascuno dei lati alla metà dello stesso perimetro.

Osservazione II.ª

Questa formola è utilissima nell' Agrimensoria, perchè se un poligono rettilineo qualunque decompongasi in triangoli, di cui si conoscano tutti i lati, senza condurre le perpendicolari, si potrà con essa immediatamente misurare l' area del poligono.

Applicazione

Sia (Fig. 33.ª n.° 2.°) $AC = 5$; $AB = 4$; $BC = 3$, e si avrà

$$b = 5 ; c = 4 ; a = 3$$

ove si chiami $AC = b$; $AB = c$; $CB = a$. E quindi sarà

$$\text{Area } ABC = \sqrt{\left\{\frac{12}{2}\left(\frac{12}{2}-3\right)\left(\frac{12}{2}-5\right)\left(\frac{12}{2}-4\right)\right\}} = \sqrt{(6.3.1.2)} = \sqrt{36} = 6$$

Ed infatti essendo in questo caso rettangolo il triangolo ABC, se si moltiplicherà il lato CB, che serve di altezza, ossia 3, per la metà del lato AB, che serve di base, ossia per 2, si avrà 6 per la superficie del triangolo.

Problema XXXIV.

Data la corda di un arco trovar la corda della sua metà. (Fig. 34.ª tav. 2.ª)

Soluzione

Sia $AB = a$ (Fig. 34.ª) la corda data; $AB' = a'$ la ricercata. Il raggio del cerchio dato sia $CB = r$. Supposto sciolto il problema si tirino le rette AC, AD. I due triangoli DAB', MAB' sono simili, perchè equiangoli. (n.° 235 lib. 5.°) Dunque si avrà la proporzione

$$DB' : AB' :: AB' : MB'$$

Analiticamente . . . . . $2r : a' :: a' : MB'$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj sarà

$$(a')^2 = 2r \,.\, MB' \qquad (\varphi)$$

Nel triangolo rettangolo AMC si ha (n.° 101 lib. 1.°)

$$(MC)^2 = (AC)^2 - (AM)^2$$

Estraendo la radice positiva . . $MC = \sqrt{\{(AC)^2 - (AM)^2\}}$

Analiticamente, per essere $AM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$, si otterrà $MC = \sqrt{\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)}$

Cognita MC si conosce pure MB', ch'è lo stesso di CB' − MC. Sarà pertanto

$$MB' = r - \sqrt{\left(r^2 - \frac{a}{4}\right)}$$

Il qual valore sostituito nell' equazione (φ) ci darà

$$(a')^2 = 2r\left(r - \sqrt{\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)}\right) = 2r^2 - 2r\sqrt{\left(\frac{4r^2 - a^2}{4}\right)} = 2r^2 - r\sqrt{(4r^2 - a^2)}$$

Ed estraendo la radice positiva sarà . . . $a' = \sqrt{\left(2r^2 - r\sqrt{(4r^2 - a^2)}\right)}$

Questa è la formola, che si ricercava per la corda della metà d'una data corda.

Osservazione I.ª

Se suppongasi il raggio eguale all'unità si avrà più semplicemente per l'espressione della chiesta corda

$$a' = \sqrt{\left(2 - \sqrt{(4 - a^2)}\right)}$$

Osservazione II.ª

La formola trovata essendo del tutto generale, se si volesse una corda corrispondente ad un arco, che fosse la metà di quello, cui corrisponde la corda a', e s'indicasse per a'', non si dovrebbe far altro, che sostituire a' nella trovata formola invece di a, ed a'' invece di a'; onde si avrebbe

$$a'' = \sqrt{\left(2r^2 - r\sqrt{(4r^2 - (a')^2)}\right)}$$

Da ciò si scorge, come colla suddetta formola non solamente si trovi subito la corda corrispondente alla metà di un arco dato, ma ancora una corda, che corrisponda ad $\frac{1}{4}$, ad $\frac{1}{8}$ etc. dello stesso arco dato.

Problema XXXV.

Trovare una serie di cerchi, i quali stiano fra loro come la serie de' seguenti rapporti per la maggior parte incommensurabili

$$1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : 2 : \sqrt{5} : \sqrt{7} : \sqrt{8} : 3 \ldots\ldots\ldots$$

(Fig. 35.ª tav. 3.ª)

Soluzione

Si chiami a il raggio del 1.° cerchio; x, y, z, u . . . . . i raggi de' cerchi ricercati. Per la nota proprietà di queste figure (n.° 341 lib. 7.°) si avrà la proporzione

$$\text{cerch. } a : \text{cerch. } x :: a^2 : x^2 \qquad (\varphi)$$

Ma per condizione del problema debb' essere

$$\text{cerch. } a : \text{cerch. } x :: 1 : \sqrt{2} \qquad (\varphi')$$

Dunque paragonando (φ), e (φ') sarà pure

$$a^2 : x^2 :: 1 : \sqrt{2}$$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si prenda la radice positiva, e sarà

$$x = \sqrt{(a^2\sqrt{2})} = \sqrt{(a\sqrt{2a^2})}$$

Allo stesso modo sarà . cerch. a : cerch. y :: $a^2 : y^2 :: 1 : \sqrt{3}$

Donde, come sopra . . . $y = \sqrt{(a\sqrt{3a^2})}$

Similmente. . . . . cerch. a : cerch. z :: $a^2 : z^2 :: 1 : 2$

Donde, come sopra . . . $z = \sqrt{2a^2}$

E così di seguito. Dunque i raggi de' cerchi cercati saranno

a ; $\sqrt{(a\sqrt{2a^2})}$; $\sqrt{(a\sqrt{3a^2})}$; $\sqrt{(a\sqrt{4a^2})}$, ossia $\sqrt{2a^2}$; $\sqrt{(a\sqrt{5a^2})}$ . . .

Costruzione

Col raggio AB (Fig. 35.ª), che si è fatto eguale ad a si descriva un cerchio. Ad angolo retto in A si alzi la retta AC=AB, e si congiungano i punti C, B colla retta CB. Si avrà (n.° 101 lib. 1.°)

$$(CB)^2 = (CA)^2 + (AB)^2 = 2(AB)^2$$

Analiticamente . . . . . $(CB)^2 = 2a^2$

Presa la radice positiva . . . . . $CB = \sqrt{2a^2}$

Sopra CB, presa per diametro, si descriva il semicerchio CAB, e presa BG=AB da G si alzi alla periferia del semicerchio la perpendicolare GH. Si congiunga il punto H col punto B per mezzo della retta HB. Sarà questa il raggio del 2.° cerchio cercato. Congiunta infatti la retta HC il triangolo CHB è rettangolo, dal cui angolo retto si è abbassata la perpendicolare HG. Dunque (n.° 243 lib. 5.°) sarà HB media proporzionale tra CB, e BG, ossia tra $\sqrt{2a^2}$, ed a; onde si avrà la proporzione

$$\sqrt{2a^2} : HB :: HB : a$$

1.° Facciasi il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si prenda la radice positiva, e sarà

$$HB = \sqrt{(a\sqrt{2a^2})}$$

Che è il valore trovato pel raggio del 2.° cerchio. Lo stesso si faccia sopra tutte le altre ipotenuse, e così ottenendo le rette HB, LB, MB, NB..... saranno queste i raggi della serie de' chiesti cerchi. C. D. T.

Problema XXXVI.

Dato il diametro FQ, e due segmenti in esso CA, CB, alzate dai punti A, B le perpendicolari AH, BD, si domanda sulla BD prolungata un punto G tale, che condotta la retta GH alla periferia sia il rettangolo di GH in HA eguale al rettangolo di FC in BA. (Fig. 36.ª tav. 3.ª)

Soluzione

Facciasi (Fig. 36.ª) $CB = a$; $CA = b$; $FC = r$. Per essere cogniti i segmenti FC, CA è pur cognita FA, e quindi AQ, ch'è uguale al diametro meno FA. Sarà pur cognita la normale AH (n.° 120 lib. 2.°), che noi assumeremo rappresentata da c. Facciasi $DG = x$

Nel triangolo GDH si avrà (n.° 101 lib. 1.°)

$$(GH)^2 = (DG)^2 + (DH)^2 = (DG)^2 + (AB)^2 = (DG)^2 + (BC + CA)^2$$

Analiticamente..... $(GH)^2 = x^2 + (a+b)^2$

Presa la radice..... $GH = \pm\sqrt{(x^2 + (a+b)^2)}$

Per condizione del problema si debbe avere l'equazione

$$GH \,.\, HA = FC \,.\, BA$$

Analiticamente, preso il solo segno positivo nel valore di GH, si otterrà

$$c\sqrt{(x^2 + (a+b)^2)} = r(a+b)$$

Quadrando questa equazione... $c^2(x^2 + (a+b)^2) = r^2(a+b)^2$

1.° Si divida per c^2. 2.° Si sottragga $(a+b)^2$. 3.° Si sciolga il 2.° membro ne' suoi fattori, e si avrà

$$x^2 = \left(\frac{r^2}{c^2} - 1\right)\left((a+b)^2\right)$$

4.° Si riduca il 2.° membro ad essere tutto diviso per c^2. 5.° Si estragga la radice, e sarà

$$x = \pm \frac{(a+b)\sqrt{(r^2-c^2)}}{c} \qquad (P)$$

COSTRUZIONE

Nella formola (P) si assuma il segno superiore. Dal centro C conducasi al punto H la retta CH. Si avrà (luogo citato)

$$(CH)^2 = (CA)^2 + (AH)^2$$

Sottraendo $(AH)^2$, ed ordinando per $(CA)^2$ sarà

$$(CA)^2 = (CH)^2 - (AH)^2$$

Analiticamente . . . . . $b^2 = r^2 - c^2$

Presa la radice col segno superiore $b = \sqrt{(r^2-c^2)}$

Ora se dal punto H condurrassi la retta HG in modo, che l'angolo GHD eguagli l' angolo CHA, il punto G, in cui la HG taglia BD prolungata, sarà il cercato. In questo caso saranno simili infatti i due triangoli GDH, CAH (n.° 235 lib. 5.°), e quindi si avrà la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$AH : AC :: HD : DG$$

Analiticamente . . . . . $c : \sqrt{(r^2-c^2)} :: a+b : DG$

Da cui, fatto il prodotto de' medj, e diviso pel 1.° termine, si avrà finalmente

$$DG = \frac{(a+b)\sqrt{(r^2-c^2)}}{c} = x \qquad \text{C. D. T.}$$

Dobbiamo ora vedere, come si possa costruire l'angolo GHD eguale all' angolo CHA. L' angolo AHD è retto per costruzione. Se HG sarà tangente al cerchio nel punto H sarà necessariamente retto anche l'angolo CHG (n.° 148 lib. 3.°), e per conseguenza gli angoli CHG, AHD saranno eguali fra loro. Da questi sottratto l' angolo comune DHC, rimarrà l' angolo CHA eguale all' angolo GHD. Dunque per determinare il punto G tale, che soddisfaccia al problema, bisognerà condurre dal punto H una tangente al cerchio prodotta sino al concorso colla retta BD, prolungata essa pure, nel qual concorso verrà segnato il punto, di cui si cerca.

PROBLEMA XXXVII.

Sopra una retta qualunque AB costruire un triangolo ACB tale, che condotta in esso la normale CD sieno le rette AB, AC, BC, CD continuamente tra loro proporzionali. (Fig. 37.ª tav. 3.ª)

SOLUZIONE

Suppongasi ABC il triangolo, di cui si cerca, e sia DC la normale, che corrisponde alle condizioni del problema.

Facciasi $AB = a$; $BD = y$; $AD = x$; $CD = z$. Sarà $AB = x + y = a$

Nel triangolo rettangolo ACB si avranno le due equazioni (n.° 101 lib. 1.°)

$$(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$$
$$(BC)^2 = (CD)^2 + (DB)^2$$

Analiticamente . . . . . $(AC)^2 = x^2 + z^2$

$$(BC)^2 = z^2 + y^2$$

Prese le radici positive. . . . . $AC = \sqrt{(x^2 + z^2)}$

$$BC = \sqrt{(z^2 + y^2)}$$

Per condizione del problema si avrà la proporzione

$$AB : AC :: CB : CD$$

Analiticamente . . . . . $x + y : \sqrt{(x^2 + z^2)} :: \sqrt{(z^2 + y^2)} : z$

Quadrando . . . . . $x^2 + 2xy + y^2 : x^2 + z^2 :: z^2 + y^2 : z^2$

Sottraendo agli antecedenti i conseguenti si otterrà (n.° 238 lib. 5.°)

$$2xy + y^2 - z^2 : x^2 + z^2 :: y^2 : z^2$$

Permutando . . . . . $2xy + y^2 - z^2 : y^2 :: x^2 + z^2 : z^2$

Sottraendo agli antecedenti i conseguenti . . . $2xy - z^2 : y^2 :: x^2 : z^2$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si sottragga y^2x^2. 3.° Si cambino i segni a tutta l'equazione, e si ordini per z^4. 4.° Si estragga la radice positiva. 5.° Si aggiunga xy, e si avrà

$$z^2 = xy \qquad (\varphi)$$

Posta (φ) in proporzione sarà (n.° 236 lib. 5.°)

$$x : z :: z : y$$

Sarà dunque $DC = z$ media proporzionale tra x, ed y, cioè tra AD, e DB. Dunque l'angolo ACB sarà retto. (Prop.° recipr.ª del n.° 244 lib. 5.°)

Ciò posto il dato problema cambiasi in quest'altro: sopra l'ipotenusa AB descrivere un triangolo rettangolo, i cui lati AB, AC, CB sieno continuamente proporzionali fra loro. Ritenute le medesime denominazioni si avrà per condizione del problema l'analogia

$$AB : AC :: AC : CB$$

Analiticamente . . . $x + y : \sqrt{(x^2 + z^2)} :: \sqrt{(x^2 + z^2)} : \sqrt{(y^2 + z^2)}$

Sostituito a s^2 il valore trovato in (φ) si avrà

$$x+y : \sqrt{(x^2+xy)} :: \sqrt{(x^2+xy)} : \sqrt{(y^2+xy)}$$

Ossia . . . . . $x+y : \sqrt{((x+y)x)} :: \sqrt{((x+y)x)} : \sqrt{((x+y)y)}$ (φ')

Ma $x+y=a$. Dunque sostituito questo valore in (φ') si avrà

$$a : \sqrt{ax} :: \sqrt{ax} : \sqrt{ay} \qquad (\lambda)$$

Ma $a=\sqrt{a}.\sqrt{a}$. Dunque sostituita quest'altra espressione in (λ) sarà

$$\sqrt{a}.\sqrt{a} : \sqrt{ax} :: \sqrt{ax} : \sqrt{ay}$$

Dividendo per $\sqrt{a}$. . . $\sqrt{a} : \sqrt{x} :: \sqrt{x} : \sqrt{y}$

Quadrando . . . . . $a : x :: x : y$

Dunque AD $=x$ debb'essere media proporzionale tra a, ed y, cioè tra AB, e BD. Dunque per ottenere la soluzione del problema dovrassi dividere la data AB in media, ed estrema ragione. (n.° 212 lib. 5.°)

Costruzione

Presa AB per diametro si descriva il corrispondente semicerchio, e sia nel punto D (n.° 265 lib. 5.°) divisa AB in media, ed estrema ragione; innalzata da esso punto D la perpendicolare DC segante in C la periferia, se si congiugneranno le rette AC, CB sarà ACB il triangolo cercato. C. D. F.

Problema XXXVIII.

Dato l'angolo QAN, e dal punto B dato sulla QA innalzata la perpendicolare BD sino ad incontrare in D l'altro lato NA, vogliasi determinare sul lato QA un altro punto P, da cui condotta la perpendicolare PM, riesca PM = MD. (Fig. 38.ª tav. 3.ª)

Soluzione

Essendo dato il punto B (Fig. 38.ª n.° 1.°) saranno cognite le tre rette AB, BD, AD.

Facciasi pertanto AB $=a$; BD $=b$; AD $=c$. Dal triangolo rettangolo ABD avrassi l'equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(AD)^2=(AB)^2+(BD)^2$$

Analiticamente. . . . . $(AD)^2=a^2+b^2$

Presa la radice positiva . . . $AD = \sqrt{(a^2 + b^2)} = c$
Supposto trovato il punto P, si conduca la perpendicolare PM
Facciasi $AP = x$; $PM = y$
Pei triangoli simili (ABD, APM) si avrà la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$AB : BD :: AP : PM$$

Analiticamente . . . . . $a : b :: x : y$
Fatto il prodotto de' medj, e diviso pel 1.° tèrmine sarà

$$y = \frac{bx}{a}$$

Ma per condizione del problema debb'essere DM = PM. Dunque si avrà

$$DM = MP = y = \frac{bx}{a}$$

Ma negli stessi triangoli abbiamo ancora quest' altra proporzione

$$PB : MD :: AP : AM$$

Dunque analiticamente sarà . . . $a - x : \frac{bx}{a} :: x : AM$

Fatto il prodotto de' medj, e diviso pel 1.° termine riuscirà

$$AM = \frac{bx^2}{a(a-x)}$$

Nel triangolo rettangolo APM si ha (luogo citato) l'equazione

$$(AM)^2 = (AP)^2 + (PM)^2$$

Analiticamente . . . . . $\frac{b^2x^4}{a^2(a-x)^2} = x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}$

Si moltiplichi per $a^2(a-x)^2$ . . . $b^2x^4 = a^2x^2(a-x)^2 + (a-x)^2b^2x^2$
Riducendo . . . . . $b^2x^2 = (a^2 + b^2)(a-x)^2$ (φ)
Ma abbiamo $\sqrt{(a^2 + b^2)} = c$; e quadrando $a^2 + b^2 = c^2$. Dunque sostituito questo valore in (φ) sarà

$$b^2x^2 = c^2(a-x)^2$$

1.° Si eseguisca il quadrato accennato. 2.° Si sottragga b^2x^2, e c^2a^2. 3.° Si ordini per x^2, e sarà

$$c^2x^2 - b^2x^2 - 2ac^2x = -c^2a^2$$

Riducendo . . . . . $x^2(c^2 - b^2) - 2ac^2x = -c^2a^2$
Ma $c^2 - b^2 = a^2$. Dunque . . . $a^2x^2 - 2ac^2x = -c^2a^2$

4.° Si divida per a^2. 5.° Si compisca il quadrato. 6.° Si estragga la radice. 7.° Si aggiunga $\frac{c^2}{a}$, e si otterrà

$$x = \frac{c^2}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2} - c^2\right)}$$

Costruzione

Dal punto D (Fig. 38.ª n.° 2.°) s'innalzi DC perpendicolare ad AN, e si produca questa perpendicolare ad incontrare in C la retta AQ. Fatto centro in C col raggio CD si descriva il semicerchio PDQ. Questo taglierà in P la retta AQ per modo, che AP, ed AQ saranno i due valori trovati per la x. Per essere infatti il triangolo ACD rettangolo si avrà la proporzione (n.° 243 lib. 5.°)

$$AB : AD :: AD : AC$$

Analiticamente . . . . . $a : c :: c : AC = \frac{c^2}{a}$

E si avrà pure. . . . . $(CD)^2 = (AC)^2 - (AD)^2$

Analiticamente . . . . . $(CD)^2 = \frac{c^4}{a^2} - c^2$

Presa la radice. . . . . $CD = \pm\sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2} - c^2\right)}$

Dunque $AP = AC - CP = AC - CD = \frac{c^2}{a} - \sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2} - c^2\right)} = x$

$$AQ = AC + CQ = AC + CD = \frac{c^2}{a} + \sqrt{\left(\frac{c^4}{a^2} - c^2\right)} = x$$

S'innalzino pertanto dai punti P, e Q le perpendicolari PM, QN, e ne verrà, com'era dal problema richiesto, $PM = MD$; $NQ = ND$. C. D. T.

Problema XXXIX.

Date le tre perpendicolari abbassate dai vertici di un triangolo sulle basi rispettive trovare il triangolo. (Fig. 39.ª tav. 3.ª)

Soluzione

Si supponga già trovato il triangolo, e sia ABC (Fig. 39.ª n.° 1.°), nel quale vengano abbassate le perpendicolari AD, EC, BF.
Facciasi $AD = a$; $EC = d$; $BF = b$. E sia $BC = x$; $AB = y$; $AC = z$

Prendendo la superficie del triangolo ABC in tutti i modi si avranno le seguenti equazioni (n.° 423 lib. 9.°)

$$(\varphi)\ \text{Superf. ACB} = \begin{cases} BC \times \frac{DA}{2} = \frac{ax}{2} \\ BA \times \frac{EC}{2} = \frac{dy}{2} \\ AC \times \frac{BF}{2} = \frac{bz}{2} \end{cases}$$

Si moltiplichino per 2 le prime due equazioni (φ), si paragonino fra loro, e si avrà

$$dy = ax$$

Si divida per d, e la 1.ª equazione sarà . . . . . $y = \frac{ax}{d}$

Si moltiplichino per 2 la prima, e la 3.ª delle equazioni (φ), si paragonino fra loro, e sarà

$$bz = ax$$

Si divida per b, e la 2.ª equazione sarà . . . . . $z = \frac{ax}{b}$

Per trovare la terza si osservi, che il triangolo ABD rettangolo ci dà l' equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(BD)^2 = (AB)^2 - (AD)^2$$

Analiticamente. . . . . $(BD)^2 = y^2 - a^2$

Presa la radice positiva... $BD = \sqrt{(y^2 - a^2)}$

Similmente dal triangolo DAC si otterrà

$$DC = \sqrt{(z^2 - a^2)}$$

Ma $BD + DC = BC$. Dunque sostituiti i valori analitici la 3.ª equazione sarà

$$\sqrt{(y^2 - a^2)} + \sqrt{(z^2 - a^2)} = x$$

E sostituiti in questa equazione i valori trovati per z, e per y nelle prime due si avrà

$$\sqrt{\left(\frac{a^2x^2}{d^2} - a^2\right)} + \sqrt{\left(\frac{a^2x^2}{b^2} - a^2\right)} = x$$

1.° Si sottragga il 2.° termine del 1.° membro. 2.° Si quadri tutta l'equazione. 3.° Si sottragga $\frac{a^2x^2}{b^2}$, ed x^2. 4.° Si aggiunga a^2, e si avrà

$$\frac{a^2x^2}{d^2} - \frac{a^2x^2}{b^2} - x^2 = -2x\sqrt{\left(\frac{a^2x^2}{b^2} - a^2\right)}$$

5.° Si cambino i segni all'equazione. 6.° Si divida per x, e si avrà

$$\frac{a^2x}{b^2}-\frac{a^2x}{d^2}+x=2\sqrt{\left(\frac{a^2x^2-a^2b^2}{b^2}\right)}$$

7.° Si moltiplichi, e si divida per b^2 il 3.° termine del 1.° membro, l'equazione diverrà

$$\frac{a^2x}{b^2}-\frac{a^2x}{d^2}+\frac{b^2x}{b^2}=2\sqrt{\left(\frac{a^2x^2-a^2b^2}{b^2}\right)}=2\sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2}(x^2-b^2)\right)}$$

8.° Facciasi $\frac{a^2}{d^2}=\frac{c^2}{b^2}$, ovvero $\frac{a}{d}=\frac{c}{b}$, e cavato dal radicale il quadrato perfetto $\frac{a^2}{b^2}$ si avrà

$$x\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{b^2}\right)=\frac{2a}{b}\sqrt{(x^2-b^2)}$$

9.° Si moltiplichi per b^2. . . $x\,(a^2+b^2-c^2)=2ab\sqrt{(x^2-b^2)}$

10.° Si faccia $a^2+b^2-c^2=2am$, e l'equazione si trasformerà in quest'altra

$$2amx=2ab\sqrt{(x^2-b^2)}$$

11.° Si divida per $2a$. 12°. Si quadri l'equazione, che ne risulta. 13.° Si sottragga m^2x^2. 14.° Si aggiunga b^4. 15.° Si ordini per x^2 sciolta ne' suoi fattori. 16.° Si divida per b^2-m^2. 17.° Si estragga finalmente la radice positiva, e sarà

$$x=\sqrt{\left(\frac{b^4}{b^2-m^2}\right)}$$

Costruzione

Per costruire questo valore bisognerà costruire dapprima le quantità assunte c, m. Essendosi fatto $\frac{a}{d}=\frac{c}{b}$ sarà $ab=cd$, onde $d:a::b:c$. Ciò posto: prendasi (Fig. 39.ª n.° 2.°) una retta AB $=a$, ed un' altra AC $=d$; quindi ad angolo qualunque si applichi alla retta AB la retta AD $=b$. Si congiunga il punto C col punto D per mezzo della retta DC. Da B si meni parallela ad essa la retta BE, che incontrerà in E la DA prolungata. Pei triangoli simili ACD, ABE si avrà la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

AC : AB :: AD : AE

Analiticamente . . . . . $d:a::b:\mathrm{AE}=\frac{ab}{d}=c$

Per costruire m si osservi, che essendo $a^2+b^2-c^2=2am$, ove si divida

per $2a$ si avrà $m=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$, e quadrando $m^2=\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2$. Quindi fatto $n^2=b^2-m^2$, e ad m^2 sostituito il valore, che lo rappresenta, sarà

$$n^2=b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2$$

Prendasi la radice positiva, e si avrà $n=\sqrt{\left\{b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2\right\}}$

Si costruisca questo valore di n come si è fatto con quello della x nel problema 28.°, e si ponga ad un angolo qualunque colla retta AE la retta $AF=n$. Si congiunga il punto F col punto D per mezzo della retta FD, e fatta $AG=AD$, pel punto G si guidi la GH parallela ad FD. Si avranno i triangoli simili AFD, AGH, dai quali (luogo citato) emergerà la proporzione

$$AF : AG :: AD : AH$$

Analiticamente

$$n : b :: b : AH=\frac{b^2}{n}=\sqrt{\left(\frac{b^4}{n^2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{b^4}{b^2-m^2}\right)}=x$$

Per trovare y si uniscano i punti C, H colla retta CH, e pel punto B si conduca ad essa parallela la retta BK. Dai triangoli simili ACH, ABK si avrà, come sopra, la proporzione

$$AC : AB :: AH : AK$$

Analiticamente. . . . . $d : a :: x : AK=\frac{ax}{d}=y$

Ora per avere il triangolo basterà trovare uno de' segmenti della base AK (Fig. 39.ª n.° 2.°), e dall' estremità di esso innalzare una perpendicolare eguale ad AB, ossia analiticamente ad a, ed unire i punti A, H coll' estremità di questa perpendicolare. Uno de' segmenti, anzi il maggiore si è trovato di sopra (Fig.ª 39.ª n.° 1°) essere $BD=\sqrt{(y^2-a^2)}$; quindi per trovare la retta corrispondente a questo valore si faccia su di AK (Fig. sudd.ª n.° 2.°) come diametro il suo corrispondente semicerchio, e dal punto K inscritta in esso la retta $LK=a$, si uniscano i punti A, L colla retta LA. Il triangolo ALK è rettangolo (n.° 161 lib. 3.°); quindi si avrà (n.° 101 lib. 1.°)

$$(AL)^2=(AK)^2-(LK)^2$$

Analiticamente. . . . . $(AL)^2=y^2-a^2$

Presa la radice positiva ... $AL=\sqrt{(y^2-a^2)}=BD$

Sarà dunque AL il segmento cercato. Per la quale cosa presa sopra AH una parte AM = AL, ed innalzata la perpendicolare MN = a, unite le rette AN, NH, n' uscirà il triangolo ANH, che sarà il ricercato. C. D. F.

Osservazione

Si rifletta, che il valore di n trovato in questo problema è lo stesso di quello della x nel problema 28.°, cioè della perpendicolare abbassata dal vertice di quel triangolo: epperò se in ordine alle quantità d, a, b si prenda una quarta proporzionale, e con questa retta, e colle altre due perpendicolari date a, b si formi un triangolo, presa a per base, ed abbassata dal vertice una perpendicolare sulla base, se si prenderà una terza proporzionale in ordine a questa perpendicolare, ed al lato b, questa terza proporzionale sarà un lato del triangolo da trovarsi.

Problema XL.

Determinare tutte le dimensioni di un triangolo, supponendo cognita la sua altezza, e cogniti i raggi di due cerchi l'uno inscritto, e l'altro circoscritto al triangolo. (Fig. 40.ª tav. 3.ª)

Soluzione

Sia BAC (Fig. 40.ª n.° 1.°) il triangolo dato; OC il raggio del cerchio circoscritto; VH dell' inscritto; e BD sia l'altezza. Dal centro V del cerchio inscritto si conducano ai punti di contatto le rette VR, VH, VM, le quali riusciranno perpendicolari a' lati corrispondenti del triangolo (n.° 177 lib. 4.°). Per lo stesso punto V, e il vertice B del triangolo conducasi una retta BVZ, che tagli in Z la circonferenza del cerchio circoscritto; quindi dal centro O al punto Z si meni la retta OZ, che sarà un raggio, e congiungansi i punti C, Z colla retta CZ

Facciasi BD = a; VR = b; OZ = c. E sia AC = x; BH = y

L' area del triangolo ABC sarà espressa (n.° 423 lib. 9.°) da $BD \times \frac{AC}{2}$, ed analiticamente sarà

$$\frac{1}{2} \times ax \qquad (\pi)$$

Potrà essere pure espressa (n.° 424 lib. 9.°) dalla metà del perimetro moltiplicata pel raggio del cerchio inscritto, e quindi si avrà

$$\text{Area triang. } ABC = (AC + AB + BC) \times \frac{1}{2} VR \qquad (\varphi)$$

Ma si ha $BM = BH$; $AR = AM$; $CR = CH$ (luogo citato), e quindi

$$AC+AB+BC=AC+AM+MB+BH+HC=AC+AR+BH+BH+RC=2AC+2BH=2x+2y$$

Dunque sostituiti questi valori in (φ) sarà

$$\text{Area triang. } ABC = \frac{b}{2}(2x + 2y) = b(x + y) \qquad (\pi')$$

Paragonando (π), e (π'). . . . . $\frac{ax}{2} = b(x + y)$

Moltiplicando per 2 . . . . . $ax = 2b(x + y)$ (M)

Ma l'angolo ABC è diviso in due parti eguali dalla retta BZ (luogo citato). Dunque il punto Z sarà nel mezzo dell' arco AC, e il raggio OZ taglierà perpendicolarmente per metà la corda AC. (n.° 133 e 158 lib. 3.°) Per conseguenza sarà

$$CQ = AQ = \frac{x}{2}$$

Nel triangolo rettangolo poi OQC si avrà (n.° 101 lib. 1.°)

$$(QO)^2 = (OC)^2 - (QC)^2$$

Analiticamente . . . . . $(QO)^2 = c^2 - \frac{x^2}{4}$

Presa la radice positiva . . . $QO = \sqrt{\left(c^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$

E quindi avrassi $QZ = OZ - OQ = c - \sqrt{\left(c^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$

Per poter progredire nella soluzione dobbiamo dimostrare essere simili i triangoli rettangoli BHV, CQZ: il che si ottiene col seguente raziocinio. Se nel triangolo BHV si rappresenti l'angolo VBH per u, essendo $BHV = 90°$, riescirà l'angolo $BVH = 90° - u$. Ma nel triangolo ZOC è l'angolo ZOC doppio dell'angolo VBH (n.° 150 lib. 3.°). Dunque sarà $ZOC = 2u$. Quindi la somma dei due angoli OZC, OCZ sarà eguale a $180° - 2u$. Ma il triangolo ZOC è isoscele. Dunque questi due angoli nominati, che sono alla sua base, saranno tra loro eguali. Dunque uno di essi, ed a cagion d'esempio OZC sarà $\frac{180° - 2u}{2} = 90° - u$. Ma tale era pur l'angolo BVH. Dunque i due angoli OZC, e BVH saranno eguali. Dunque i due triangoli BVH, CQZ aventi già un angolo retto saranno

equiangoli. Dunque simili (n.° 235 lib. 5.°). Dunque si avrà la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$QZ : CQ :: VH : BH$$

Analiticamente . . . . . $c - \sqrt{\left(c^2 - \frac{x^2}{4}\right)} : \frac{x}{2} :: b : y$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj si avrà

$$y\left(c - \sqrt{\left(c^2 - \frac{x^2}{4}\right)}\right) = \frac{bx}{2} \qquad (M')$$

Nell' equazione (M) sottraendo $2bx$, e dividendo per $2b$ si avrà

$$y = \frac{ax - 2bx}{2b}$$

Il qual valore sostituito in (M') ci darà l' equazione

$$\left(\frac{ax - 2bx}{2b}\right)\left(c - \sqrt{\left(c^2 - \frac{x^2}{4}\right)}\right) = \frac{bx}{2}$$

1.° Si divida per $ax - 2bx$. 2.° Si moltiplichi per $2b$. 3.° Si aggiunga $\sqrt{\left(c^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$. 4.° Si sottragga $\frac{2b^2x}{2ax - 4bx}$, ossia $\frac{b^2}{a - 2b}$, e sarà

$$c - \frac{b^2}{a - 2b} = \sqrt{\left(c^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$$

5.° Si quadri questa equazione. 6.° Si sottragga c^2, e $\left(\frac{b^2}{a - 2b}\right)^2$. 7.° Si aggiunga $\frac{x^2}{4}$, e $\frac{2cb^2}{a - 2b}$ si otterrà

$$\frac{x^2}{4} = \frac{2cb^2}{a - 2b} - \frac{b^4}{(a - 2b)^2}$$

8.° Si moltiplichi, e si divida per $a - 2b$ il 1.° termine del 2.° membro, e sarà

$$\frac{x^2}{4} = \frac{2cb^2(a - 2b) - b^4}{(a - 2b)}$$

9.° Riducendo ad un sol fattore, moltiplicando per 4, e quindi estraendo la radice, si avrà finalmente

$$x = \pm \frac{2b\sqrt{(2ac - 4cb - b^2)}}{a - 2b}$$

Ma si è trovato $y = \frac{ax - 2bx}{2b} = \frac{x}{2b}(a - 2b)$. Dunque sostituito il valore qui trovato per x sarà

$$y = \pm\sqrt{(2ac - 4bc - b^2)}$$

COSTRUZIONE

Sul diametro AM (Fig. 40.ª n.° 2.°) del cerchio circoscritto presa $AF = a - 2b$, s' alzi dal punto F la perpendicolare FI, e dal punto I al punto A si tiri la corda AI, sulla quale, come diametro, si descriva il semicerchio AFI. In esso inscrivasi la corda $IL = b$, e la corda LA venga prodotta indefinitivamente. Congiungansi i punti L, F colla retta LF, e presa sopra AM la retta $AP = 2b$, si conduca al prolungamento di AL la retta PK parallela ad FL. Avrassi $AK = x$. Per essere infatti AI media proporzionale tra AM, ed AF (n.° 245 lib. 5.°) si avrà l' analogia

$$AM : AI :: AI : AF$$

Ma AM è uguale al doppio del raggio del cerchio circoscritto. Dunque sarà analiticamente

$$2c : AI :: AI : a - 2b$$

Fatto il prodotto degli estremi, e de' medj si avrà

$$(AI)^2 = 2ac - 4bc$$

Pel triangolo ALI si ha l' equazione (n.° 101 lib. 1.)

$$(AL)^2 = (AI)^2 - (LI)^2$$

Presa la radice . . . . . $AL = \pm\sqrt{((AI)^2 - (LI)^2)}$

Analiticamente. . . . . $AL = \pm\sqrt{(2ac - 4bc - b^2)}$

Inoltre pe' triangoli simili AFL, APK si avrà la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$AF : AL :: AP : AK$$

Analiticamente . . . . . $a - 2b : \pm\sqrt{(2ac - 4bc - b^2)} :: 2b : AK$

Fatto il prodotto de' medj, e diviso pel 1.° termine si avrà finalmente

$$AK = \pm\frac{2b\sqrt{(2ac - 4bc - b^2)}}{a - 2b} = x$$

Sarà dunque la così determinata AK, preso il segno superiore, base del triangolo, e quindi nel cerchio circoscritto inscrivendo la corda $AC = AK$ si avrà cognita la base AC del triangolo dato. Per un punto qualunque C di questa base si alzi una perpendicolare $CS = a$, e per S si guidi la retta SB'B parallela a CA. Questa incontrerà la periferia del cerchio circoscritto ne' punti B, B', i quali si potranno prendere indifferentemente pel vertice del triangolo cercato CAB, o CAB'. Questi due triangoli, che sono fra loro eguali soddisfanno ai valori positivi delle incognite x, ed y. La costruzione sarebbe la stessa pei negativi, i quali dai primi non differiscono, che per la rispettiva opposta posizione delle rette. C.D.T.

Osservazione

Dalla semplice inspezione della formola trovata per x si vede, che il problema sarebbe impossibile a sciogliersi nel caso, che fosse $2ac < -(4bc + b^2)$, perchè si avrebbe una quantità immaginaria.

Problema XLI.

Dato un angolo, ed un punto condurre da questo punto una retta a segare le due rette costituenti l'angolo, in modo, che risulti un triangolo eguale in area ad un dato rettilineo. (Fig. 41.ª tav. 3.ª)

Soluzione

Dato l'angolo BAE (Fig. 41.ª n.° 1.°), ed il punto C vuolsi condurre da questo punto una retta CE tale, che il triangolo ABE sia eguale in area ad un dato rettilineo M, ovvero ad un dato quadrato a^2 (potendosi ogni rettilineo convertire in un quadrato n.° 119 lib. 2.°). Supponendo sciolto il problema si guidi CD perpendicolare ad AE, ed al punto B la retta BF parallela alla CD.

Facciasi $AD = b$; $CD = c$; $DG = d$. E sia $AF = x$; $FE = y$

Pe' triangoli simili ADG, AFB (n.° 231 lib. 5.°) si ha la proporzione

$$AD : DG :: AF : FB$$

Analiticamente . . . . . $b : d :: x : FB = \frac{dx}{b}$

Sarà quindi $DF = AF - AD = x - b$; $DE = DF + FE = y + x - b$

Dai triangoli simili FBE, DEC si avrà l'analogia (n.° 234 lib. 5.°)

$$FE : FB :: DE : DC$$

Analiticamente . . . . . $y : \frac{dx}{b} :: y + x - b : c$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si moltiplichi per b. 3.° Si sottragga ydx. 4.° Si sciolga la y ne' suoi fattori. 5.° Si divida per $bc - dx$, e sarà

$$y = \frac{dx^2 - bdx}{bc - dx}$$

Sarà conseguentemente

$$AE = AF + FE = x + y = x + \frac{dx^2 - bdx}{bc - dx} = \frac{bcx - dx^2 + dx^2 - bdx}{bc - dx} = \frac{x(bc - bd)}{bc - dx}$$

Ciò posto: l'area del triangolo ABE, che (n.° 423 lib. 9.°) è espressa da $(AE \times BF)\frac{1}{2}$, analiticamente sarà

$$x\left(\frac{bc-bd}{bc-dx}\right)\left(\frac{dx}{2b}\right)=\frac{x^2db(c-d)}{2b(cb-dx)}=\frac{x^2d(c-d)}{2cb-2dx}$$

La quale espressione fatta eguale ad a^2, come esige il problema, si avrà l'equazione

$$\frac{x^2d(c-d)}{2cb-2dx}=a^2$$

1.° Si moltiplichi per $2cb-dx$. 2.° Si aggiunga $2a^2dx$. 3.° Si divida per $d(c-d)$ 4.° Si compisca il quadrato, e si avrà

$$x^2+\frac{2a^2x}{c-d}+\frac{a^4}{(c-d)^2}=\frac{2a^2cb}{d(c-d)}+\frac{a^4}{(c-d)^2}$$

5.° Nel 2.° membro si moltiplichi, e si divida il primo rotto per $c-d$, ed il secondo per d. 5.° Si estragga la radice. 6.° Si sottragga $\frac{a^2}{c-d}$, e sarà

$$x=-\frac{a^2}{c-d}\pm\frac{a}{c-d}\sqrt{\left\{\frac{2cb(c-d)+a^2d}{d}\right\}}$$

Preso il segno superiore, e raccogliendo la formola sotto un solo fattore si otterrà

$$x=\frac{a}{c-d}\left\{-a+\sqrt{\left((c-d)\frac{2cb}{d}+a^2\right)}\right\}$$

Costruzione

Si ritenga come sopra (Fig. 41.ª n.° 2.°) $AD=b$; $GD=d$; $DC=c$. Sarà $CG=CD-DG=c-d$. Si prolunghi CD in H, talchè si abbia $DH=2DC=2c$, e prolungata DA indefinitivamente si tiri dal punto H la retta HS parallela ad AG. Si avrà pe' triangoli simili ADG, SDH (n.° 231 lib. 5.°) la proporzione

$$DG : DH :: DA : DS$$

Analiticamente . . . . . $d : 2c :: b : DS = \frac{2bc}{d}$

Si fissi sul prolungamento della retta DA un altro punto K tale, che sia $SK=AD$, e sarà evidentemente $AK=DS=\frac{2bc}{d}$. Prendasi ora $AL=CG=c-d$, e si tagli LK per mezzo nel punto M. Si avrà (n.° 111 lib. 2.°)

$$(MA)^2=KA.AL+(ML)^2$$

Sottraendo $(ML)^2$ . . . . $(MA)^2-(ML)^2=KA\,.\,AL$

Analiticamente . . . . . $(MA)^2-(ML)^2=(c-d)\frac{2bc}{d}$

Presa MA per diametro si descriva il semicerchio corrispondente, ed applicata dal punto M alla periferia la retta $MN=ML$ si congiungano i punti N, A colla retta NA. Il triangolo MNA sarà rettangolo (n.° 161 lib. 3.°), e si avrà l'equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(NA)^2=(MA)^2-(MN)^2=(MA)^2-(ML)^2$$

Analiticamente . . . . . $(NA)^2=(c-d)\frac{2bc}{d}$

Alzata dal punto N la retta NO perpendicolare ad NA, ed uguale ad a si uniscano i punti O, A colla retta OA. Si avrà (luogo citato)

$$(AO)^2=(NO)^2+(NA)^2$$

Analiticamente . . . . . $(AO)^2=a^2+(c-d)\frac{2bc}{d}$

Presa la radice positiva. . . $AO=\sqrt{\left\{a^2+(c-d)\frac{2bc}{d}\right\}}$

Tolta dalla retta AO la retta $OP=a$, e presa $AQ=AP$ riuscirà

$$AQ=-OP+AO=-a+\sqrt{\left\{a^2+(c-d)\frac{2bc}{d}\right\}}$$

Presa $AR=a$, e congiunta la retta LR, dal punto Q si meni ad essa parallela la retta QV. I due triangoli simili LAR, QAV ci daranno la proporzione (luogo citato)

$$AL : AQ :: AR : AV$$

Analiticamente . . . . . $c-d : -a+\sqrt{\left\{a^2+(c-d)\frac{2bc}{d}\right\}} :: a : AV$

Fatto il prodotto de' medj, e diviso pel 1.° termine si avrà finalmente

$$AV=\frac{a}{c-d}\left\{-a+\sqrt{\left(a^2+(c-d)\frac{2bc}{d}\right)}\right\}=x$$

Fatto centro pertanto in A, e presa AV per raggio si segni il punto F. Sarà $AF=AV$, come raggi dello stesso cerchio, la retta cercata; onde alzata FB parallela a CD, e guidata pel punto B la retta CE, che seghi nel punto E la retta AF prolungata, sarà la CE quella retta, che partendo dal dato punto C, e segando in B, ed in E le rette, che comprendono l'angolo dato BAE, forma il triangolo ABE eguale in area al dato rettilineo M. C. D. T.

Problema XLII.

Dati tre cerchi, e data la loro posizione trovare un cerchio, che sia tangente a tutti i dati cerchi. (Fig. 42.ª tav. 3.ª)

Soluzione

In questo problema si possono dare due casi: 1.° che le rette congiugnenti i centri de' cerchi dati, e determinanti la loro posizione formino un triangolo; 2.° che formino una linea sola. Nel 1.° caso (Fig. 42.ª n.° 1.°) sieno dati i cerchi A, B, C, e la loro posizione, cioè il triangolo DEF formato dalle rette, che uniscono i loro centri, e sia HKL il cerchio che li tocca. Sia G il suo centro. Unite le rette GE, GD, GF, che passeranno pei punti di contatto (n.° 142 lib.° 3.°), preso il punto G per centro, coll' intervallo GF, composto del raggio LG accresciuto del raggio del minor cerchio dato, e in questo caso di LF, descrivasi un cercio MNF. Coi residui DM, EN dei raggi DK, EH, e coi centri D, E si descrivano gli altri due cerchi MPS, NQO. Egli è evidente, che trovato il centro, ed il raggio del cerchio MNF, se col medesimo centro, e collo stesso raggio diminuito della retta LF, ch' è cognita, si descriverà un altro cerchio KHL, questo sarà tangente ai tre cerchi dati. Il problema proposto in questo caso si riduce quindi ad essere espresso così: » dati due cerchi MPS, NOQ, ed un punto F fuori di essi trovare un cerchio MNF, che tocchi i cerchi dati, e passi pel dato punto F. «

Ora dal punto F si abbassi sulla base ED del triangolo EDF la perpendicolare FS, e dal punto G centro del cerchio da trovarsi, supposto sciolto il problema, si guidi sulla stessa base la perpendicolare GR. Facciasi $ER = x$; $RG = y$; $SF = a$; $ED = b$; $ES = c$; $EN = r$; $DM = s$. Sarà $SR = ES - ER = GT = c - x$; $TF = SF - ST = SF - RG = a - y$; $RD = ED - ER = b - x$

Ciò posto: pel triangolo rettangolo ERG si avrà (n.° 101 lib. 1.°)

$$(EG)^2 = (ER)^2 + (RG)^2$$

Analiticamente . . . . . $(EG)^2 = x^2 + y^2$

Presa la radice positiva ... $EG = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

Per la stessa ragione $FG = \sqrt{\{(GT)^2 + (TF)^2\}} = \sqrt{\{(a-y)^2 + (c-x)^2\}}$ (φ)

E similmente . . . $DG = \sqrt{\{(RD)^2 + (RG)^2\}} = \sqrt{\{(b-x)^2 + y^2\}}$

Ora noi abbiamo per GF le due espressioni seguenti, cioè

$$GF = GE - EN = \sqrt{(x^2+y^2)} - r$$

$$GF = GD - DM = \sqrt{((b-x)^2+y^2)} - s$$

Dunque paragonando separatamente questi due valori col trovato valore per GF nella equazione (φ) si otterranno le due equazioni

$$\sqrt{\left\{(a-y)^2+(c-x)^2\right\}} = \sqrt{\left\{(b-x)^2+y^2\right\}} - s$$

$$\sqrt{\left\{(a-y)^2+(c-x)^2\right\}} = \sqrt{(x^2+y^2)} - r$$

Ovvero le due seguenti

$$(F) \qquad \sqrt{((a-y)^2+(c-x)^2)} = \sqrt{(y^2+x^2)} - r$$

$$(F') \qquad \sqrt{((b-x)^2+y^2)} - s = \sqrt{(y^2+x^2)} - r$$

Volendo maneggiare queste due equazioni col solito metodo della eliminazione de' radicali coll'innalzarle alla seconda potenza, si avrebbero necessariamente due equazioni di 4.° grado.

Per ridurle al 2.° grado si faccia $y^2+x^2=z^2$, onde $z=\sqrt{(y^2+x^2)}$, e si avrà

$$\sqrt{((a-y)^2+(c-x)^2)} = z - r \qquad (p)$$

$$\sqrt{((b-x)^2+y^2)} = s + z - r \qquad (q)$$

Si faccia $s-r=-h$, e si elevino al quadrato le due equazioni (p), e (q) sarà

$$a^2 - 2ay + y^2 + c^2 - 2cx + x^2 = z^2 - 2rz + r^2 \qquad (\pi)$$

$$b^2 - 2bx + x^2 + y^2 = z^2 - 2hz + h \qquad (\pi')$$

Sostituito nel 1.° membro dell'equazione (π) il valore assunto per z^2, e similmente nel 1.° membro di (π'), si avrà

$$a^2 - 2ay + c^2 - 2cx + z^2 = z^2 - 2rz + r^2$$

$$b^2 - 2bx + z^2 = z^2 - 2hz + h^2$$

Sottraendo a tutti i membri la quantità z^2, si otterranno le due equazioni

1.ª $a^2 - 2ay + c^2 - 2cx = r^2 - 2rz$

2.ª $b^2 - 2bx = h^2 - 2hz$

1.° Nella 1.ª si sottragga tutto il 1.° membro. 2.° Vi si aggiunga $2rz$.

3.° Nella 2.ª si sottragga tutto il 1.° membro. 4.° Vi si aggiunga $2hz$, e si avranno queste altre due equazioni

$$(M) \qquad 2rz = r^2 - a^2 + 2ay - c^2 + 2cx$$

$$(N) \qquad 2hz = h^2 + 2bx - b^2$$

5.° Si divida per $2r$ l'equazione (M). 6.° E per $2h$ l'equazione (N), si avrà

$$z = \frac{r^2 - a^2 + 2ay - c^2 + 2cx}{2r} \qquad (\mu)$$

$$z = \frac{h^2 + 2bx - b^2}{2h} \qquad (\mu')$$

Facciasi $r^2 - a^2 - c^2 = -2k^2$; $\frac{2b}{2h} = \frac{b}{h} = \frac{n}{r}$; $\frac{h^2 - b^2}{2h} = -\left(\frac{m^2}{r}\right)$

Questi valori si sostituiscano in (μ), ed in (μ'), ed avrassi

Per l'equazione (μ) . . . $z = \frac{2ay + 2cx - 2k^2}{2r} = \frac{ay + cx - k^2}{r}$

Per l'equazione (μ') . . . $z = \frac{nx - m^2}{r}$ $\qquad (\lambda)$

7.° Si paragonino fra loro questi valori. 8.° Si prescinda dal comune denominatore r, e si avrà

$$ay + cx - k^2 = nx - m^2$$

Essendosi fatto $z^2 = y^2 + x^2$, ove si quadri l'ultimo valore trovato per z in (λ), e questo valore quadrato si paragoni all'espressione $y^2 + x^2$, si otterrà l'equazione

$$y^2 + x^2 = \left(\frac{nx - m^2}{r}\right)^2$$

9.° Si eseguisca l'accennato quadrato. 10.° Si moltiplichi tutta l'equazione per r^2, e si avrà

$$r^2y^2 + r^2x^2 = n^2x^2 - 2nm^2x + m^4$$

Dunque le due equazioni primitive potranno essere ridotte alle seguenti

I.ª $ay + cx - k^2 = nx - m^2$

II.ª $r^2y^2 + r^2x^2 = n^2x^2 - 2nm^2x + m^4$

11.° Nella I.ª si sottragga cx, e si aggiunga k^2. 12.° Si divida quindi per a, ed avrassi

$$y = \frac{(n - c)x - m^2 + k^2}{a}$$

6.° Facciasi $r^2 - z^2 = -2k^2$; $\frac{h^2 - b^2}{2h} = -\frac{m^2}{r}$; $\frac{2b}{2h} = \frac{b}{h} = \frac{n}{r}$, e si avranno i due valori

$$z = \frac{cx - k^2}{r} \; ; \; z = \frac{nx - m^2}{r}$$

7.° Si prescinda dal denominatore comune, e si paragonino questi valori. 8.° Nell'equazione, che n'emerge, si sottragga nx. 9.° Vi si aggiunga k^2. 10.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 11.° Si divida per $c - n$, e sarà

$$x = \frac{k^2 - m^2}{c - n}$$

12.° Il valore della y si otterrà finalmente sostituendo alla x il valore trovato nella equazione $y^2 + x^2 = \left(\frac{nx - m^2}{r}\right)^2$, che si è trovata superiormente.

Osservazione

Questo problema è stato inserito nella raccolta a solo oggetto di far vedere, come in certi casi si possa ricavare l'equazione del problema riducendolo ad un altro più facile, che dica lo stesso, e come si maneggino le diverse formole per portarle ad una espressione più semplice, e più elegante.

Si ommette la costruzione, perchè riesce di troppo complicata, e nojosa.

Problema XLIII.

Dato il lato di un poligono regolare inscritto in un cerchio pur dato, trovare il lato d'un poligono simile circoscritto. (Fig. 43.ª tav. 3.ª)

Soluzione

Suppongasi AB (Fig. 43.ª) il lato d'un poligono regolare inscritto in un cerchio, e GD il lato del poligono simile circoscritto. Si tiri dal centro C il raggio CA, e la perpendicolare CE sopra la retta AB data. Sia $AB = a$; $AC = r$. Nel triangolo rettangolo AEC si avrà (n.° 101 lib. 1.°)

$$(EC)^2 = (AC)^2 - (AE)^2$$

Presa la radice positiva... $EC = \sqrt{\{(AC)^2 - (AE)^2\}}$

Analiticamente. . . . . $EC = \sqrt{\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)}$

Ora si ha dagli elementi della Geometria, che due poligoni regolari simili hanno i loro lati, che stanno nella ragione de' loro apotemi, e che il raggio è l' apotema di tutti i poligoni regolari circoscritti al cerchio. Dunque conoscendosi il lato del poligono regolare inscritto, il suo apotema, ed il raggio, si conoscerà tosto il lato del poligono simile circoscritto per mezzo d' una quarta proporzionale. Nel nostro caso si avrà

$$EC : AB :: AC : GD$$

Analiticamente . . . . . $\sqrt{\left(r^2-\frac{a^2}{4}\right)} : a :: r : GD = \frac{ar}{\sqrt{\left(r^2-\frac{a^2}{4}\right)}}$ (M)

Dunque essendo a il lato d'un poligono regolare inscritto, ed r il raggio, il lato del poligono simile circoscritto verrà espresso da $\frac{ar}{\sqrt{\left(r^2-\frac{a^2}{4}\right)}}$

Osservazione

Se si volesse tutto il perimetro del poligono circoscritto, poichè il numero dei lati tanto nell' inscritto, quanto nel circoscritto è uguale, supposto n questo numero, e moltiplicando per esso i due conseguenti della proporzione (M) si otterrà

$$\sqrt{\left(r^2-\frac{a^2}{4}\right)} : an :: r : \frac{anr}{\sqrt{\left(r^2-\frac{a^2}{4}\right)}}$$

nella quale il quarto termine esprimerà tutto il perimetro del poligono circoscritto. C. D. T.

Problema XLIV.

Trovare il lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio, espresso pel raggio, e quindi il lato del triangolo equilatero circoscritto; e le aree dell' uno, e dell'altro similmente espresse pel raggio. (Fig. 44.ª tav. 3.ª)

Soluzione

Sia inscritto nel cerchio (Fig.ª 44.ª) l' esagono regolare ADECFG, ed il triangolo equilatero AEF. È cognita per gli elementi di Geometria la proprietà dell' esagono regolare inscritto nel cerchio, d'avere cioè il lato eguale al raggio (n.° 192 lib.° 4.°). Ciò posto: sia r il raggio. Sarà $AC = 2r$; $CE = r$

Facciasi $AE = x$. Nel triangolo rettangolo AEC (n.° 161 lib.° 3.°) si avrà l'equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(AE)^2 = (AC)^2 - (CE)^2$$

Presa la radice positiva . . $AE = \sqrt{\{(AC)^2 - (CE)^2\}}$

Analiticamente . . . . . $x = \sqrt{(4r^2 - r^2)} = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$ (φ)

Dunque il lato del triangolo equilatero inscritto espresso pel raggio sarà $r\sqrt{3}$

Per trovare il lato del triangolo equilatero circoscritto secondo il principio del problema antecedente bisogna dapprima trovare l'apotema del triangolo equilatero inscritto; quindi condotto il raggio BF si avrà (luogo citato) nel triangolo rettangolo BKF l'equazione

$$(BK)^2 = (BF)^2 - (FK)^2$$

Analiticamente. . . . . $(BK)^2 = r^2 - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4} = \frac{r^2}{4}$

Presa la radice positiva . . . $BK = \frac{r}{2}$

Servendoci pertanto di quel principio si avrà la proporzione

$$\frac{r}{2} : r\sqrt{3} :: r : 4^{to} = \frac{r^2\sqrt{3}}{\frac{r}{2}} = 2r\sqrt{3} \qquad (\varphi')$$

e questo quarto termine esprimerà il lato del triangolo equilatero circoscritto.

Osservazione I.ª

Quadrando l'equazione (φ) si ha $x^2 = 3r^2$. Da qui si raccoglie il teorema, che il quadrato del lato del triangolo equilatero inscritto ad un cerchio è triplo del quadrato del suo raggio.

Osservazione II.ª

Esaminando le quantità (φ), e (φ') si vede essere il lato del triangolo equilatero circoscritto al cerchio doppio del lato del triangolo equilatero inscritto; e da qui si raccoglie il teorema, che il quadrato del lato del triangolo equilatero circoscritto è dodici volte il quadrato del raggio, e quattro volte il quadrato del lato del triangolo equilatero inscritto.

Ma passiamo a trovare le aree dei due triangoli per compiere la chiesta soluzione del problema.

Ritenuta l' espressione $r\sqrt{3}$ pel lato del triangolo equilatero inscritto, ed usando del principio esposto nel problema 33.°, per cui si ottiene l' area, cogniti i lati, la formola

$$\sqrt{\left\{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)\right\}}$$

cambiasi in quest' altra

$$\sqrt{\left\{\frac{3r\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3r\sqrt{3}}{2}-r\sqrt{3}\right)\left(\frac{3r\sqrt{3}}{2}-r\sqrt{3}\right)\left(\frac{3r\sqrt{3}}{2}-r\sqrt{3}\right)\right\}}$$

Riducendo.. $\sqrt{\left(\frac{3r\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{r\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{r\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{3r^4.9}{16}\right)}=\sqrt{\left(\frac{27r^4}{16}\right)}=\frac{r^2}{4}\sqrt{27}=\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$

Quindi l' area del triangolo equilatero inscritto sarà $\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$

Applicando la suddetta formola per trovar l' area del triangolo equilatero circoscritto, il cui lato è $2r\sqrt{3}$, detta area verrà espressa dalla formola

$$\sqrt{\left(\frac{432r^4}{16}\right)}=\frac{r^2}{4}\sqrt{(432)}=\frac{r^2}{4}\sqrt{(12^2.3)}=\frac{12r^2\sqrt{3}}{4}=3r^2\sqrt{3}$$

Osservazione III.ª

L' area del triangolo equilatero circoscritto è quadrupla di quella dell' inscritto; nella stessa guisa, che il quadrato del lato del triangolo equilatero circoscritto è quadruplo del quadrato del lato del triangolo equilatero inscritto.

Problema XLV.

Trovare il lato del quadrato inscritto nel cerchio espresso pel raggio, e quindi il lato del quadrato circoscritto; e le aree dell' uno, e dell' altro similmente espresse pel raggio. (Fig. 45.ª tav.ª 3.ª)

Soluzione

S' inscriva nel cerchio il quadrato ABCD (Fig.ª 45.ª), e si circoscriva allo stesso cerchio il quadrato GHIF (n.i 179. 180. lib.° 4.°). Si avrà nel triangolo ADE l' equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(AD)^2=(AE)^2+(ED)^2=2(AE)^2$$

Presa la radice positiva . . . $AD = \sqrt{(2(AE)^2)}$

Se farassi il raggio eguale ad r, sarà $AD = \sqrt{(2r^2)} = r\sqrt{2}$

Questo valore esprimerà il lato del quadrato inscritto. Ed essendo $HI = AC$ è tosto trovato il lato del quadrato circoscritto, perchè riesce eguale al doppio del raggio, cioè $2r$.

Quadrando poscia le due espressioni $r\sqrt{2}$, e $2r$ si avrà

$$2r^2 ; 4r^2$$

Quindi l'area del quadrato inscritto sarà $2r^2$; e $4r^2$ quella del quadrato circoscritto. C. D. T.

Osservazione I.ª

L'area del quadrato inscritto è il doppio del quadrato del raggio; e l'area del circoscritto è quattro volte lo stesso quadrato del raggio, ossia è il quadrato del diametro.

Osservazione II.ª

Starà il quadrato del raggio al quadrato del diametro, come il quadrato del lato del triangolo equilatero inscritto al quadrato del lato del triangolo equilatero ciscoscritto.

Osservazione III.ª

Similmente avrassi quest'altro teorema; che la superficie del quadrato del raggio sta a quella del quadrato del diametro come la superficie del triangolo equilatero inscritto a quella del triangolo equilatero circoscritto.

Problema XLVI.

Trovare il lato del pentagono regolare inscritto nel cerchio espresso pel raggio, e quindi il lato del pentagono circoscritto; e le aree d'entrambi similmente espresse pel raggio. (Fig. 46.ª tav. 3.ª)

Soluzione

S'inseriva nel cerchio il pentagono regolare ABDEC (Fig 46.ª n.° 1.°), e si tirino le rette AD, AE, ed i raggi GA, GC. Il triangolo ADE rie-

sce isoscele per costruzione (n.° 185 lib. 4.°), e gli angoli alla base ADE, AED sono ciascuno il doppio dell' angolo al vertice DAE. Dunque ciascuno di quei due angoli alla base sarà di 72.°, e l' angolo DAE sarà di 36.°

Ora il lato del pentagono è uguale al segmento maggiore del lato DA di detto triangolo diviso in media, ed estrema ragione. Questo teorema non potendo essere appoggiato direttamente alle proposizioni degli elementi da noi citati, debb' essere dimostrato. A tale effetto si tagli per mezzo l' angolo DEA colla retta FE. Ciascuno degli angoli DEF, FEA sarà di 36.° Dunque i due triangoli ADE, FDE aventi l' angolo D comune, e l' angolo DAE = FED saranno simili (n.° 235 lib. 5.°). Dunque si avrà la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$AD : DE :: DE : DF \qquad (M)$$

Nel triangolo DEF l' angolo FDE è di 72.°, l' angolo DEF di 36.° Dunque l' angolo DFE dovrà essere di 72.° Dunque il triangolo DEF sarà isoscele (n.° 47 lib. 1.°). Dunque FE = ED. Nel triangolo AFE l' angolo FAE è di 36.°, l' angolo FEA esso pure è di 36.° Dunque anche il triangolo AFE è isoscele. Dunque FE = FA. Dunque sarà pure ED = FA. Ciò posto: sostituendo FA a DE nella proporzione (M) si avrà l' analogia

$$AD : FA :: FA : FD$$

Dunque (n.° 212 lib. 5.°) la retta DA sarà nel punto F divisa in media ed estrema ragione, ed il segmento maggiore FA, che si è trovato eguale a DE, sarà eguale al lato del pentagono; come dovevasi dimostrare.

Facciasi al presente $DE = FA = x$; $DA = AE = y$. Sarà $FD = AD - FA = y - x$ Si tenga sempre r il raggio. Sostituiti i valori analitici nella proporzione (M) si otterrà

$$y : x :: x : y - x$$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si compisca il quadrato. 3.° Si estragga la radice. 4.° Si aggiunga $\frac{x}{2}$, e si avrà

$$y = \frac{x}{2} \pm \frac{x}{2}\sqrt{5} = x\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$$

Il lato AE essendo tagliato per metà in H (n.° 133 lib. 3.°) si avrà, preso il segno superiore nel valore della y

$$AH = \frac{1}{2}AE = \frac{y}{2} = x\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)$$

Il triangolo rettangolo AGH ci darà l' equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(GH)^2 = (GA)^2 - (AH)^2$$

Presa la radice positiva... $GH = \sqrt{\{(GA)^2 - (AH)^2\}}$

Analiticamente..... $GH = \sqrt{\left\{r^2 - x^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\right\}}$

Quindi $HC = CG - GH = r - \sqrt{\left\{r^2 - x^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\right\}}$

Nel triangolo rettangolo AHC si avrà pel luogo citato quest'altra equazione

$$(AC)^2 = (AH)^2 + (HC)^2$$

Analiticamente... $x^2 = x^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left\{r^2 - \sqrt{\left(r^2 - x^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\right)}\right\}^2$

5.° Si eseguisca l'accennato quadrato del 2.° membro. 6.° Si riducano le espressioni, che ne sortono, e che sono omogenee; si avrà

$$x^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{\left\{r^2 - x^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\right\}}$$

7.° Si sottragga $2r^2$. 8.° Quindi si quadri tutta l'equazione. 9.° All'equazione, che n'emerge, si sottragga $4r^4$, e si aggiunga $4r^2x^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$; sarà

$$x^4 - 4r^2x^2 + 4r^2x^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 0$$

Ossia ..... $x^4 - 4r^2x^2\left(1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\right) = 0$

10.° Dividendo per x^2... $x^2 - 4r^2\left(1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\right) = 0$

11.° Si faccia il quadrato accennato... $x^2 - 4r^2\left(1 - \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{16}\right)\right) = 0$

12.° Riducendo... $x^2 - 4r^2\left(\frac{16-1-2\sqrt{5}-5}{16}\right) = x^2 - 4r^2\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{16}\right) = 0$

13.° Trasportando nel 2.° membro il 2.° termine del 1.°, e riducendo, sarà

$$x^2 = 4r^2\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{16}\right) = r^2\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{4}\right) = r^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$$

14.° Presa la radice positiva... $x = r\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$

E questa formola esprimerà il lato del pentagono regolare inscritto nel cerchio, ed espresso pel raggio.

Per trovare il lato del pentagono regolare circoscritto si cerchi l'apotema del pentagono inscritto, il qual apotema (Vedi il problema 43.°)

è sempre uguale alla radice quadrata della differenza de' quadrati del raggio, e della metà della corda cognita. Ciò posto: l'apotema del pentagono sarà

$$\sqrt{\left(r^2-\frac{r^2}{4}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}=\sqrt{\left(r^2-r^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)\right)}=r\sqrt{\left(1-\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)\right)}=r\sqrt{\left(\frac{8-5+\sqrt{5}}{8}\right)}=r\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)}$$

Dunque pel citato problema il lato del pentagono regolare circoscritto si otterrà dalla proporzione seguente

$$r\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)}:r\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}::r:4^{to}=\frac{r^2\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}}{r\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)}}=\frac{r\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)}}=(\varphi)$$

il qual quarto termine sarà il lato richiesto.

Per rendere più semplice la formola del lato del pentagono regolare circoscritto si divida essa, e si moltiplichi insieme per $\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)}$, e si avrà

$$\left\{r\sqrt{\left\{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)\right\}}\right\}\left\{\frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right\}$$

Eseguendo l'accennata moltiplica, e portando il denominatore 2.° nel numeratore sarà

$$\left\{8r\sqrt{\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{16}\right)}\right\}\left\{\frac{1}{3+\sqrt{5}}\right\}=\left\{\frac{8r}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\right\}\left\{\frac{1}{3+\sqrt{5}}\right\}=\frac{2r\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{3+\sqrt{5}}$$

Mettendo sotto il radicale anche il denominatore bisognerà quadrarlo, e la formola diverrà

$$2r\sqrt{\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{14+6\sqrt{5}}\right)}=2r\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}\right)}$$

la quale ultima quantità darà più semplicemente di (φ) il lato del pentagono regolare circoscritto al cerchio espresso pel raggio.

Per trovare le aree (Fig. 46.ª n.° 2.°) dal centro G si conducano i raggi GA, GB, GC, GD, GE. Resterà il pentagono diviso in 5 triangoli eguali. Prendasi una retta eguale al perimetro d'esso pentagono, ossia al quintuplo del suo lato, e ad una sua estremità si alzi perpendicolarmente una retta eguale all'apotema dello stesso pentagono. Condotta l'ipotenusa, onde formare il triangolo colle due rette accennate, questo triangolo sarà eguale all'area del pentagono (n.° 424 lib. 9.°). Ma la

superficie di un triangolo si misura col rettangolo della base nella metà dell' altezza (n.° 423 lib. 9.°). Dunque essendo la retta, che rappresenta la base di questo triangolo espressa da $5r\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$, e l' altezza da $r\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)}$, sarà la sua area espressa dalle formole seguenti

$$\frac{r}{2}\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)}\left(5r\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}\right)=\frac{5r^2}{2}\sqrt{\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{16}\right)}=r^2\sqrt{\left(\frac{125+25\sqrt{5}}{32}\right)}=5r^2\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{32}\right)}$$

E quest' ultima formola esprimerà l' area del pentagono regolare inscritto.

Per ottenere quella del circoscritto si usi lo stesso metodo, il quale consiste, qualunque siasi il poligono, che si voglia misurare, a prendere un triangolo rettangolo, il quale abbia per base il perimetro di quel poligono, e per altezza il suo apotema, e poi misurarne l' area, che riesce eguale all' area del poligono in questione.

Essendo il lato del pentagono circoscritto espresso dalla formola $2r\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}\right)}$, il suo perimetro sarà $10r\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}\right)}$, base del triangolo, e l' apotema, ch' è l' altezza del triangolo, essendo r, la chiesta superficie sarà

$$\frac{r}{2}\times 10r\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}\right)}=\frac{10r^2}{2}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}\right)}=5r^2\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}\right)}\quad \text{C. D. T.}$$

Problema XLVII.

Trovare il lato dell' esagono circoscritto espresso pel raggio; e le aree dell' esagono inscritto, e circoscritto espresse similmente pel raggio.

Soluzione

Poichè il lato dell' esagono inscritto nel cerchio è uguale al raggio, il suo apotema pel problema 43.° sarà

$$\sqrt{\left(r^2-\frac{r^2}{4}\right)}=\sqrt{\left(\frac{4r^2-r^2}{4}\right)}=\sqrt{\left(\frac{3r^2}{4}\right)}=\frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Pel problema istesso il lato dell' esagono circoscritto si otterrà dalla seguente proporzione

$$(Q)\qquad \frac{r\sqrt{3}}{2}:r::r:4^{to}=\frac{r^2}{\frac{r\sqrt{3}}{2}}=\frac{2r}{\sqrt{3}}=\frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

Nella quale l'espressione del 4.° termine darà il lato dell'esagono circoscritto.

Per trovare le aree usando del consueto metodo del triangolo, la base di questo sarà espressa da $6r$ per l'esagono inscritto, e la sua altezza da $\frac{r\sqrt{3}}{2}$, e quindi la sua area sarà

$$\frac{r\sqrt{3}}{4} \times 6r = \frac{6r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$$

Per avere l'area del circoscritto, operando similmente, la base del triangolo sarà $4r\sqrt{3}$, ed r l'altezza, onde l'area si avrà dall'espressione

$$\frac{r}{2} \times 4r\sqrt{3} = \frac{4r^2\sqrt{3}}{2} = 2r^2\sqrt{3} \qquad \text{C. D. T.}$$

Osservazione I.ª

Il raggio è una media proporzionale tra l'apotema dell'esagono inscritto, e il lato dell'esagono circoscritto. Questo teorema deducesi chiaramente dalla proporzione (Q).

Osservazione II.ª

Il lato dell'esagono circoscritto è la terza parte del lato del triangolo equilatero circoscritto. Il lato infatti dell'esagono circoscritto si è trovato essere $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$, e nel problema 44.° si è veduto essere $2r\sqrt{3}$ il lato del triangolo equilatero circoscritto.

Osservazione III.ª

La superficie dell'esagono inscritto è dupla di quella del triangolo equilatero inscritto, ed è metà del triangolo eqilatero circoscritto. Basta confrontare l'espressioni di queste aree per conoscere la verità del teorema.

Osservazione IV.ª

La superficie dell'esagono circoscritto sta a quella del triangolo equilatero inscritto :: 8 : 3. Infatti la 1.ª è $2r^2\sqrt{3}$, la 2.ª $\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$; le quali

quantità stanno fra loro $:: 2 : \frac{3}{4} :: 8 : 3$. La stessa superficie dell' esagono circoscritto sta a quella del triangolo equilatero circoscritto $:: 2 : 3$, essendo la 1.ª $2r^2\sqrt{3}$, e la 2.ª $3r^2\sqrt{3}$

Osservazione V.ª

Dalle stesse formole si raccoglie, che fra il triangolo equilatero inscritto, l' esagono regolare inscritto, e l' esagono regolare circoscritto il rapporto dei lati è $\div\!\div\ 3 : \sqrt{3} : 2$; e quello delle aree $\div\!\div\ 3 : 6 : 8$

Problema XLVIII.

Trovare il lato dell' ottagono regolare inscritto espresso pel raggio, e quindi anche quello dell' ottagono circoscritto; e le aree d' entrambi similmente espresse pel raggio.

Soluzione

Poichè data la corda di un arco si trova la corda della sua metà pel problema 34.°, conoscendo il lato del quadrato inscritto, si verrà in cognizione di quello dell' ottagono. Fatto adunque x il lato, di cui si cerca, e presa la formola di quel problema

$$a' = \sqrt{\{2r^2 - r\sqrt{(4r^2 - a^2)}\}}$$

sostituendo in essa all' espressione a^2 il quadrato inscritto, ch' è $2r^2$, si avrà

$$x = \sqrt{\{2r^2 - r\sqrt{(4r^2 - 2r^2)}\}} = \sqrt{\{2r^2 - r\sqrt{(2r^2)}\}} = \sqrt{(2r^2 - r^2\sqrt{2})} = \sqrt{\{r^2(2 - \sqrt{2})\}} = r\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$$

Quest' ultima espressione $r\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$ sarà il lato dell' ottagono inscritto.

Per trovare quello del circoscritto si osservi, che pel problema 43.° l' apotema dell' ottagono inscritto sarà $\sqrt{\left\{r^2 - \frac{r^2(2 - \sqrt{2})}{4}\right\}}$, ossia semplificando la formola sarà $\sqrt{\left\{r^2\left(1 \frac{-2 + \sqrt{2}}{4}\right)\right\}} = r\sqrt{\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4}\right)}$. Dunque per lo stesso problema il lato richiesto si avrà dal 4.° termine della proporzione

$$r\sqrt{\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4}\right)} : r\sqrt{(2 - \sqrt{2})} :: r : 4.^{to} = \frac{r\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{\sqrt{\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4}\right)}}$$

Per rendere più semplice quest' ultima formola esprimente il lato dell' ottagono circoscritto, si moltiplichi essa, e si divida insieme per $\sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)}$, e si avrà

$$\left\{r\sqrt{\left((2-\sqrt{2})\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)\right)}\right\}\left\{\frac{1}{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\right\}.$$

Eseguendo l' accennata moltiplica . . . $\frac{r\sqrt{\left(\frac{2}{4}\right)}}{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{4r\sqrt{\left(\frac{2}{4}\right)}}{2+\sqrt{2}}=\frac{2r\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

E dividendo tutti i termini per $\sqrt{2}$ . . . $\frac{2r}{\frac{2}{\sqrt{2}}+1}=\frac{2r}{\frac{2\sqrt{2}}{2}+1}=\frac{2r}{\sqrt{2}+1}$

Dunque il lato dell' ottagono circoscritto ridotto alla sua massima semplicità sarà espresso dalla formola $\frac{2r}{\sqrt{2}+1}$

Per trovare le aree facciasi il triangolo, secondo il solito, la cui base sarà otto volte il lato dell' ottagono inscritto, cioè $8r\sqrt{(2-\sqrt{2})}$, e l' altezza $\frac{r}{4}\sqrt{(2+\sqrt{2})}$, che è l'apotema dell' ottagono istesso; e si otterrà

$$\left(\frac{r}{4}\sqrt{(2+\sqrt{2})}\right)8r\sqrt{(2-\sqrt{2})}=\frac{8r^2}{4}\cdot\sqrt{2}=2r^2\sqrt{2}$$

Dunque l' area dell' ottagono inscritto sarà $2r^2\sqrt{2}$. Quella del circoscritto si avrà dal triangolo, che ha per base l' espressione $\frac{16r}{1+\sqrt{2}}$, e per altezza il raggio istesso r, e sarà quindi

$$\frac{r}{2}\left(\frac{16r}{1+\sqrt{2}}\right)=\frac{16r^2}{2+2\sqrt{2}}=\frac{8r^2}{1+\sqrt{2}}$$

Dunque $\frac{8r^2}{1+\sqrt{2}}$ sarà l' area dell' ottagono regolare circoscritto.

Osservazione

Confrontando queste formole si vede chiaramente, che l' ottagono inscritto sta all' esagono circoscritto $:: \sqrt{2} : \sqrt{3}$; e sta al quadrato inscritto $:: \sqrt{2} : 1$.

Problema XLIX.

Trovare il lato del decagono regolare inscritto nel cerchio, espresso pel raggio, e quindi anche quello del circoscritto; e le aree dell'uno, e dell'altro similmente espresse pel raggio.

Soluzione

Conoscendo il lato del pentagono si trova quello del decagono per mezzo del problema 34.°, in cui abbiamo la formola

$$a' = \sqrt{\left\{2r^2 - r\sqrt{(4r^2 - a^2)}\right\}}$$

In questa formola sostituendo ad a^2 il quadrato del lato del pentagono, e facendo x il lato richiesto, si avrà

$$x = \sqrt{\left\{2r^2 - r\sqrt{\left(4r^2 - r^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}\right\}} = \sqrt{\left\{2r^2 - r\sqrt{\left(r^2\left(4 - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}\right\}}$$

E riducendo ancora . . . $x = \sqrt{\left\{2r^2 - r^2\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}\right\}} = \sqrt{\left\{2r^2 - r^2\sqrt{\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)}\right\}}$

Per le successive semplificazioni, che qui si fanno, si avrà finalmente

$$x = \sqrt{\left\{2r^2 - r^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}} = \sqrt{\left\{r^2\left(2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\right\}} = \sqrt{\left\{r^2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}} = \sqrt{\left\{r^2\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)\right\}} = r\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

E quest'ultima espressione $r\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ sarà il lato del decagono inscritto nel cerchio ottenutosi per mezzo di quello del pentagono.

Ma si potrebbe trovare anche senza l'ajuto di qualsivoglia altro poligono, avendo egli la proprietà di essere uguale al segmento maggiore del raggio diviso in media, ed estrema ragione.

Infatti (Fig. 47.ª n.° 1.° tav. 3.ª) l'angolo O, che corrisponde alla decima parte della circonferenza è di 36.° Dunque ciascuno degli angoli ABO, OAB è di 72.° per essere il triangolo AOB isoscele. Diviso per mezzo l'angolo ABO colla retta MB, ed usando di un ragionamento affatto simile a quello, che si è tenuto, parlando del pentangono (Prob.ª 46.) si troverà la proporzione

$$AO : AB :: AB : AM$$

quindi egualmente dimostrando essere $AB = MB = OM$ si avrà

$$AO : MO :: MO : AM \qquad (\varphi)$$

Fatto $MO = x$; $AO = r$; e sostituiti i valori analitici in (φ) sarà

$$r : x :: x : r - x$$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si aggiunga rx. 3.° Si compisca il quadrato del 1.° membro. 4.° Si estragga la radice positiva. 5.° Si sottragga $\frac{r}{2}$. 6.° Si cavi dal radicale la quantità $\frac{r^2}{4}$, ch'è un quadrato perfetto, e si avrà

$$x = \frac{-r + r\sqrt{5}}{2} = r\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

Questa espressione, che rappresenta il lato del decagono inscritto nel cerchio è identica con quella, che superiormente si è trovata.

Osservazione I.ª

Se dal lato del pentagono si può inferire quello del decagono, viceversa da quello del decagono si può inferir quello del pentagono. Replicato due volte il lato del decagono AF (Fig. 47.ª n.° 2.°), onde venga segnato il punto G, dal punto A al punto G condotta la retta AG, sarà questa il lato del pentagono. Dal punto A si tiri il diametro AH, e dai punti G, F al punto H si guidino le rette GH, FH. Nel triangolo rettangolo AFH si avrà l'equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(FH)^2 = (AH)^2 - (AF)^2$$

Analiticamente. . . . . $(FH)^2 = 4r^2 - r^2\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2$

Eseguendo il quadrato, e sciogliendo la r^2 ne' suoi fattori sarà

$$(FH)^2 = r^2\left(4 - \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}\right)\right) = r^2\left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}\right)$$

Si avrà pure quest'altra equazione (n.° 428 lib. 9.°)

$$(FH)^2 = \frac{1}{2} \times AH \times GH + \frac{1}{2}(AH)^2$$

Analiticamente . . . . . $r^2\left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}\right) = r.GH + 2r^2$

1.° Si sottragga $2r^2$. 2.° Si divida tutta l'equazione per r. 3.° Si ordini per GH, e sarà

$$GH = r\left(\frac{2 + 2\sqrt{5}}{4}\right) = r\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

Nel triangolo rettangolo AGH si ha l'equazione (luogo citato)

$$(AG)^2 = (AH)^2 - (GH)^2$$

Analiticamente $(AG)^2 = 4r^2 - r^2\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) = r^2\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{4}\right) = r^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ (Q)

Presa la radice positiva si avrà finalmente $AG = r\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$, che al problema 46.° si è trovato precisamente essere il lato del pentagono.

Osservazione II.ª

Ripresa l'equazione (Q) essa punto non si altera, se si pone sotto quest' altra forma

$$(AG)^2 = r^2\left(1 - \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)\right) = r^2\left(1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)$$

Si prenda la radice positiva, e sarà

$$AG = \sqrt{\left\{r^2\left(1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)\right\}} = \sqrt{\left\{r^2 - r^2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}}$$

Ma si è trovato, che l'espressione $r\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ rappresenta il lato del decagono. Dunque il lato del pentagono è uguale alla radice quadrata della somma de' quadrati del raggio, e del lato del decagono.

Per trovar poscia il lato del decagono circoscritto si cerchi al solito l'apotema dell'inscritto, il quale sarà

$$\sqrt{\left(r^2 - \frac{r^2}{4}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)} = r\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)} = r\sqrt{\left(1 - \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right)\right)} = r\sqrt{\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{16}\right)} = r\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)}$$

Dunque pel problema 43.° il lato del decagono circoscritto sarà rappresentato dal 4.° termine della seguente proporzione

$$r\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)} : r\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) :: r : 4^{to} = \frac{r\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)}}$$

Perchè quest'ultima formola ci si presenti più semplice, pongasi sotto il radicale quadrato anche il numeratore, e a tale effetto si quadri. Si avrà

$$r\sqrt{\left\{\frac{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}}{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right\}} = r\sqrt{\left\{\frac{8(6-2\sqrt{5})}{4(5+\sqrt{5})}\right\}} = r\sqrt{\left\{\frac{4(3-\sqrt{5})}{5+\sqrt{5}}\right\}} = 2r\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right)}$$

Dunque il lato del decagono circoscritto semplificato sarà $2r\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right)}$

Per trovare finalmente le aree, usando del solito triangolo, quanto al decagono inscritto la base sarà espressa da $10r\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=5r\left(-1+\sqrt{5}\right)$; e l' altezza, ch' è l' apotema, sarà $r\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)}$. Per conseguenza l' area sarà

$$\frac{5r}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\left(r\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)}\right)=\frac{5r^2}{2}\sqrt{\left\{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)\left(6-2\sqrt{5}\right)\right\}}=\frac{5r^2}{2}\sqrt{\left(\frac{20-4\sqrt{5}}{8}\right)}=\frac{5r^2}{2}\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

Quanto al circoscritto la base del triangolo sarà espressa da $20r\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right)}$ e l' altezza sarà il raggio. Dunque l' area sarà

$$\frac{r}{2}\times 20r\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right)}=10r^2\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right)} \qquad \text{C. D. T.}$$

Problema L.

Trovare il lato del dodecagono regolare inscritto nel cerchio, espresso pel raggio, e quindi anche il lato del dodecagono circoscritto; e le aree d' entrambi similmente espresso pel raggio.

Soluzione

Conoscendosi il lato dell' esagono inscritto, il quale uguaglia il raggio si conoscerà il lato del dodecagono per la formola del problema 34.° Si avrà dunque

$$x=\sqrt{\left\{2r^2-r\sqrt{(4r^2-r^2)}\right\}}$$

Riducendo.... $x=\sqrt{\left(2r^2-r\sqrt{(3r^2)}\right)}=\sqrt{(2r^2-r^2\sqrt{3})}=r\sqrt{(2-\sqrt{3})}$

Dunque il lato del dodecagono inscritto sarà $r\sqrt{(2-\sqrt{3})}$

Per trovare quello del circoscritto cerchisi al solito l' apotema dell'inscritto, il quale sarà

$$\sqrt{\left(r^2-\frac{r^2}{4}(2-\sqrt{3})\right)}=\sqrt{\left(r^2-\frac{2r^2}{4}+\frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)}=\sqrt{\left(\frac{2r^2+r^2\sqrt{3}}{4}\right)}=\frac{r}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$$

E pel noto problema 43.° il lato del dodecagono circoscritto si avrà dal 4.° termine della seguente proporzione

$$\frac{r}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}:r\sqrt{(2-\sqrt{3})}::r:4.^{to}=\frac{r^2\sqrt{(2-\sqrt{3})}}{\frac{r}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}}$$

Riducendo . . . . . $\frac{2r\sqrt{(2-\sqrt{3})}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})}} = 2r\sqrt{\left\{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right\}}$

E moltiplicando, e dividendo sotto il radicale per $2+\sqrt{3}$ si avrà

$$2r\sqrt{\left\{\frac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\right\}} = 2r\sqrt{\left(\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\right)} = \frac{2r}{2+\sqrt{3}}$$

Dunque il lato del dodecagono circoscritto sarà espresso da $\frac{2r}{2+\sqrt{3}}$

Osservazione I.ª

Confrontando le formole sta il lato del dodecagono inscritto al lato dell' ottagono inscritto :: $2-\sqrt{3} : 2-\sqrt{2}$; ed il lato del dodecagono circoscritto sta al lato dell' ottagono inscritto :: $1+\sqrt{2} : 2+\sqrt{3}$

Per trovare l'area del dodecagono inscritto, usando del solito triangolo, la base sarà $12r\sqrt{(2-\sqrt{3})}$, e l'altezza, ossia l'apotema $\frac{r}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$; e quindi si avrà

$$\frac{r}{4}\sqrt{(2+\sqrt{3})}\left(12r\sqrt{(2-\sqrt{3})}\right) = 3r^2\sqrt{1} = 3r$$

Dunque l' area del dodecagono inscritto sarà $3r^2$

Per trovare quella del circoscritto si avrà nel solito triangolo la base rappresentata da $\frac{24r}{2+\sqrt{3}}$, e l'altezza sarà il raggio; onde si avrà

$$\frac{r}{2} \times \frac{24r}{2+\sqrt{3}} = \frac{24r^2}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{12r^2}{2+\sqrt{3}}$$

Dunque l' area del dodecagono circoscritto sarà $\frac{12r^2}{2+\sqrt{3}}$

Osservazione II.ª

L' area del dodecagono inscritto è uguale al quadrato del lato del triangolo equilatero inscritto.

Osservazione III.ª

Pel modo fin qui tenuto nella soluzione di questi problemi si vede, che per mezzo del problema 34.° si potranno avere espressi pel raggio i poligoni inscritti, che seguono, cioè di lati

24 . 48 . 96 . 192 ec. . . 16 . 32 . 64 . 128 ec. . . 20 . 40 . 80 . 160 ec. . .

e pel problema 43.° i poligoni simili circoscritti; e le aree degli uni, e degli altri.

Formole dei lati de' poligoni inscritti e circoscritti al cerchio e delle aree di questi poligoni espresse pel raggio dedotte dalla soluzione degli antecedenti problemi

Lati

Triang.° equilat.° inscritto $r\sqrt{3}$	Circoscritto . . . . . $2r\sqrt{3}$
Quadrato inscritto . . . $r\sqrt{2}$	Circoscritto . . . . . $2r$
Pentagono inscritto . . . $r\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$	Circoscritto . . . . . $2r\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}\right)}$
Esagono inscritto . . . . r	Circoscritto . . . . . $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$
Ottagono inscritto. . . . $r\sqrt{(2-\sqrt{2})}$	Circoscritto . . . . . $\frac{2r}{1+\sqrt{2}}$
Decagono inscritto . . . $r\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	Circoscritto . . . . . $2r\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right)}$
Dodecagono inscritto. . $r\sqrt{(2-\sqrt{3})}$	Circoscritto . . . . . $\frac{2r}{2+\sqrt{3}}$

Aree

Triang.° equilat.° inscritto $\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$	Circoscritto . . . . . $3r^2\sqrt{3}$
Quadrato inscritto . . . $2r^2$	Circoscritto . . . . . $4r^2$
Pentagono inscritto . . . $5r^2\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{32}\right)}$	Circoscritto . . . . . $5r^2\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}\right)}$
Esagono inscritto . . . . $\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$	Circoscritto . . . . . $2r^2\sqrt{3}$
Ottagono inscritto. . . . $2r^2\sqrt{2}$	Circoscritto . . . . . $\frac{8r^2}{1+\sqrt{2}}$
Decagono inscritto . . . $\frac{5r^2}{2}\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$	Circoscritto . . . . . $10r^2\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right)}$
Dodecagono inscritto. . $3r^2$	Circoscritto . . . . . $\frac{12r^2}{2+\sqrt{3}}$

Altre Osservazioni sugli stessi Problemi

1.ª

L'area del triangolo equilatero inscritto è uguale al rettangolo contenuto dal suo perimetro, e dalla quarta parte del raggio; oppure dal suo lato, e dalla quarta parte di una retta tripla del raggio.

2.ª

L'area del triangolo equilatero circoscritto è uguale al rettangolo contenuto dal perimetro del triangolo equilatero inscritto, e dal raggio: oppure dal lato del triangolo equilatero inscritto, e da una retta tripla del raggio.

3.ª

L'area del pentagono circoscritto è uguale al rettangolo contenuto dal suo lato, e dalla metà di una retta quintupla del raggio.

4.ª

L'area dell'esagono inscritto è uguale al rettangolo contenuto dal perimetro del triangolo equilatero inscritto, e dalla metà del raggio.

5.ª

L'area dell'esagono circoscritto è uguale al rettangolo contenuto dal suo lato, e da una retta tripla del raggio; oppure dal raggio, e dal lato del triangolo equilatero circoscritto; od anche dal diametro, e dal lato del triangolo equilatero inscritto.

6.ª

L'area dell'ottagono inscritto è uguale al rettangolo formato dal diametro, e dal lato del quadrato inscritto.

7.ª

L'area dell'ottagono circoscritto è uguale al rettangolo contenuto dal suo lato, e da una retta doppia del diametro.

8.ª

L'area del decagono inscritto è uguale al rettangolo formato dal perimetro del pentagono inscritto, e dalla metà del raggio.

9.ª

Finalmente se fossero dati i lati de' poligoni inscritti, o circoscritti al cerchio, e si cercasse il raggio espresso per essi, si dovrebbe osservare, che se è ignoto il raggio, non è però ignota la relazione, che passa tra il raggio, ed i suddetti poligoni, la quale relazione è uguale in qualsivoglia cerchio. Dunque conoscendosi queste relazioni facilmente si troverà il raggio prendendo nelle formole già trovate di sopra per cognito quello, che allora si cercava, e per incognito il raggio, che ivi era dato. Così essendo $x = \sqrt{r}$ il lato del triangolo equilatero inscritto, se questo lato è cognito rappresentato per a, si avrà $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$; ed essendo $x = r\sqrt{2}$ il lato del quadrato inscritto, se questo è cognito, rappresentato per b, sarà $r = \frac{b}{\sqrt{2}}$; e così dicasi in tutti gli altri casi.

Problema LI.

Trovare una serie di cerchi, che stiano fra loro come la progressione de' numeri naturali. (Fig. 48.ª tav. 3.ª)

Soluzione

Sia a il raggio del primo cerchio, e sieno $x, y, z, u \ldots$ i raggi dei cerchi da trovarsi. S'incominci dal cerchio rappresentato dal 2 nella data serie. Per essere i cerchi proporzionali ai quadrati de' diametri (n.° 341 lib. 7.°) si avrà l'analogia

$$\text{cerch. } a : \text{cerch. } x :: a^2 : x^2 \qquad (\varphi)$$

Ma il 1.° cerchio deve stare al 2.° :: 1 : 2 per condizione del problema.

Dunque sarà pure . . cerch. a : cerch. x :: 1 : 2 $\qquad (\varphi')$

Paragonando (φ), e (φ') . . . . $a^2 : x^2 :: 1 : 2$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si prenda la radice positiva, e sarà

$$x = \sqrt{(2a^2)} = a\sqrt{2}$$

Similmente si avrà la proporzione

$$\text{cerch. } a : \text{cerch. } y :: a^2 : y^2 :: 1 : 3$$

E come sopra . . . . . $y = \sqrt{(3a^2)} = a\sqrt{3}$

E così pure . . . cerch. a : cerch. z :: $a^2 : z^2 :: 1 : 4$

Donde . . . . . $z = \sqrt{(4a^2)} = 2a$

E così successivamente. Dunque i raggi dei cerchi richiesti saranno i seguenti

$$a,\ a\sqrt{2},\ a\sqrt{3},\ 2a,\ a\sqrt{5},\ a\sqrt{6},\ a\sqrt{7}\ \ldots\ldots$$

Costruzione

È facilissima la costruzione di questi valori, e se ne può dare una per tutti. Presa (Fig. 48.ª) una retta $AB = a$, s'alzi dal punto A perpendicolarmente una retta $AC = AB$, e si congiungano i punti C, e B colla retta CB. Al punto C s'alzi perpendicolarmente una retta $CD = AB$, e si congiunga il punto D col punto B per mezzo della retta BD. Similmente dal punto D si alzi perpendicolarmente la retta $DE = AB$, e si congiungano i punti E, B colla retta EB; e così di seguito. Egli è evidente (n.° 101 lib. 1.°), che si avranno le seguenti equazioni

$$(CB)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 = a^2 + a^2 = 2a^2;\ \text{onde } CB = \sqrt{(2a^2)} = a\sqrt{2}$$

$$(DB)^2 = (DC)^2 + (CB)^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2;\ \text{onde } DB = \sqrt{(3a^2)} = a\sqrt{3}$$

$$(BE)^2 = (DE)^2 + (DB)^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2;\ \text{onde } BE = \sqrt{(4a^2)} = 2a$$

Dunque le ipotenuse di tutti questi triangoli rettangoli rappresenteranno la serie de' raggi pe' cerchi, i quali staranno fra loro ÷ 1 : 2 : 3 : 4 : 5 ecc. C. D. T.

Osservazione

Si può trovare una serie di cerchi, i quali stiano col primo in progressione aritmetica crescente d'una quantità qualunque per differenza. Si può anche trovare una serie di cerchi, che stiano come qualunque progressione geometrica: poichè tutte le serie aritmetiche, e geometriche

di quantità intere sono contenute nella serie dei numeri naturali. Essendosi trovati i cerchi per questa serie, si saranno trovati egualmente per tutte le altre serie in essa comprese. Per trovare però i raggi de' cerchi appartenenti alla serie geometrica ∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 . . . . . si osservi, che si può anche adoperare una costruzione più breve dell'antecedente, ma ad essa somigliante, conservando il metodo d'innalzare una perpendicolare sopra l'ipotenusa di ciascun triangolo rettangolo, e sostituendo alla costante a l'ipotenusa del triangolo rettangolo precedente, di modo che ne vengano tanti successivi triangoli rettangoli, ed isosceli.

Problema LII.

Dati due cerchi trovarne un terzo, che sia eguale alla loro somma, ed un quarto, che sia eguale alla loro differenza (Fig. 49.ª tav. 4.ª).

Soluzione

Sieno a, b i raggi dei due cerchi dati, notando per a il raggio del cerchio maggiore. Chiamisi x il raggio del cerchio eguale alla loro somma. Si avrà la proporzione (n.° 341 lib. 7.°)

$$\text{cerch. } a : \text{cerch. } b :: a^2 : b^2 \qquad (M)$$

Componendo . . cerch. a + cerch. b : cerch. b :: $a^2 + b^2 : b^2$ (A)

E per la stessa proprietà de' cerchi si avrà l'altra proporzione

$$\text{cerch. } x : \text{cerch. } b :: x^2 : b^2 \qquad (A')$$

Ma per condizione del problema è . . . cerch. x = cerch. a + cerch. b

Dunque sostituito questo valore in (A') sarà

$$\text{cerch. } a + \text{cerch. } b : \text{cerch. } b :: x^2 : b^2 \qquad (B)$$

Paragonando (A), e (B) . . . $a^2 + b^2 : b^2 :: x^2 : b^2$

In questa proporzione essendo uguali i conseguenti saranno pur uguali gli antecedenti, e si avrà l'equazione

$$x^2 = a^2 + b^2$$

Presa la radice positiva . . . $x = \sqrt{(a^2 + b^2)}$

E questa sarà l'espressione del raggio del cerchio eguale alla somma dei due cerchi dati.

Per trovare il cerchio eguale alla differenza dei dati cerchi si faccia y il suo raggio. Sottraendo la proporzione (M) sarà

$$\text{cerch. } a - \text{cerch. } b : \text{cerch. } b :: a^2 - b^2 : b^2 \qquad (C)$$

E per la indicata proprietà de' cerchi si avrà l'analogia

$$\text{cerch. } y : \text{cerch. } b :: y^2 : b^2 \qquad (C')$$

Ma per condizione del problema è . . . cerch. $y =$ cerch. $a -$ cerch. b

Dunque sostituito questo valore in (C') sarà

$$\text{cerch. } a - \text{cerch. } b : \text{cerch. } b :: y^2 : b^2 \qquad (D)$$

Paragonando (D), e (C) . . . $a^2 - b^2 : b^2 :: y^2 : b^2$

Donde, come sopra, si otterrà . . . $y = \sqrt{(a^2 - b^2)}$

E questa sarà l'espressione del raggio del cerchio eguale alla differenza dei due dati cerchi.

Costruzione

Per costruire i due valori della x, e della y prendasi una retta $AB = b$ (Fig. 49.ª), e preso il punto A per centro, ed AB per raggio si descriva un cerchio. Col medesimo centro, e coll'intervallo $AC = a$, preso per raggio, applicando essa AC perpendicolarmente ad AB, descrivasi un altro cerchio. Si congiungano i punti C, B colla retta CB, e da B si guidi la BD perpendicolare ad AB sino alla periferia del 2.° cerchio. Quindi si congiungano i punti D, A colla retta DA. Il triangolo ABC rettangolo dà l'equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(CB)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$

Analiticamente. . . . . $(CB)^2 = a^2 + b^2$

Presa la radice positiva . . $CB = \sqrt{(a^2 + b^2)} = x$

Dunque il cerchio, che avrà CB per raggio equivalerà alla somma dei due dati cerchi.

Similmente il triangolo rettangolo ABD darà l'equazione

$$(DB)^2 = (AD)^2 - (AB)^2$$

Analiticamente. . . . . $(DB)^2 = a^2 - b^2$

Presa la radice positiva . . $DB = \sqrt{(a^2 - b^2)} = y$

Dunque il cerchio, che avrà DB per raggio sarà eguale alla differenza dei due dati cerchi. C. D. T.

Osservazione I.ª

Se col raggio AE = BC, cioè uguale al raggio equivalente alla somma dei due dati cerchi si descrive un cerchio concentrico ai dati, la zona determinata dalla periferia del nuovo cerchio, e da quella del cerchio maggiore dato sarà eguale al dato cerchio minore. E se col raggio AF = BD, cioè uguale al raggio del cerchio equivalente alla differenza dei due dati cerchi si descrive un cerchio concentrico ai dati, la zona contenuta tra la periferia di questo nuovo cerchio, e quella del cerchio maggiore dato sarà pure eguale al dato cerchio minore; talchè tutta la zona contenuta tra la periferia del cerchio di somma, e quella del cerchio di differenza sarà doppia del cerchio minore dato. L'ultima zona poi, cioè quella, che è contenuta tra la periferia del cerchio di differenza, e quella del cerchio minore dato sarà eguale alla differenza fra la zona determinata dalla periferia dei due cerchi dati, ed il cerchio minore.

Per dimostrare questa specie di teorema, e per maggiore intelligenza dell'osservazione converrà trovare l'espressione della superficie di tutti questi cerchi. Se noi faremo $r : p$ il noto rapporto del raggio alla circonferenza, l'espressione della circonferenza del cerchio, che ha per raggio $\sqrt{(a^2+b^2)}$ si avrà dalla proporzione (n.° 434 lib. 9.°)

$$r : p :: \sqrt{(a^2+b^2)} : 4^{to} = \frac{p\sqrt{(a^2+b^2)}}{r}$$

E l'area del suddetto cerchio sarà (n.° 433 lib. 9.°)

$$\frac{p}{r}\sqrt{(a^2+b^2)} \times \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)} = \frac{p}{2r}(a^2+b^2)$$

Dunque l'area del cerchio di somma, che ha per raggio $AE = CB = \sqrt{(a^2+b^2)}$ sarà $\frac{p}{2r}(a^2+b^2)$

La circonferenza del cerchio, che ha per raggio a si avrà dall'analogia

$$r : p :: a : 4^{to} = \frac{ap}{r}$$

e la sua area sarà . . . . . $\frac{a}{2} \times \frac{ap}{r} = \frac{pa^2}{2r}$

Dunque l'area del dato cerchio maggiore, che ha per raggio $AC = a$ sarà $\frac{pa^2}{2r}$

L'area del dato cerchio minore, che ha per raggio $AB = b$ sarà collo stesso raziocinio $\frac{pb^2}{2r}$

L'altra circonferenza, che ha per raggio $AF = DB = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ sarà $\frac{p}{r}\sqrt{(a^2 - b^2)}$, e la sua area $\frac{p}{2r}(a^2 - b^2)$

Dunque la zona A (Fig. 49.ª) sarà

$$\frac{p}{2r}(a^2 + b^2) - \frac{pa^2}{2r} = \frac{p}{2r}(a^2 + b^2 - a^2) = \frac{pb^2}{2r}$$

cioè eguale precisamente all'area del dato cerchio minore. Lo stesso si troverebbe per le altre zone indicate in questa osservazione.

Osservazione II.ª

Si può ancora collo stesso mezzo trovare la somma, e la differenza di quanti cerchi si vogliono, poichè se il raggio del cerchio eguale alla somma di due cerchi, che hanno i raggi a, e b è $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, cioè a dire la radice quadrata della somma de' quadrati dei raggi, che hanno i cerchi sommati, se vi fosse un altro cerchio col raggio c, la somma di esso, e del cerchio, che ha per raggio $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ avrebbe per raggio l'espressione $\sqrt{\left(c^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)}^2\right)} = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$. E se ve ne fossero altri da sommare, operando allo stesso modo, il raggio del cerchio di somma sarebbe $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ldots)}$. Collo stesso raziocinio troverebbesi il raggio d'un cerchio eguale alla differenza di quanti cerchi si vogliono, espresso da $\sqrt{(a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \ldots)}$

Problema LIII.

Circoscrivere ad un cerchio dato una corona di cerchi eguali, di numero n, tangenti fra loro, e tangenti al dato. (Fig. 50.ª tav. 4.ª)

Soluzione

Supponendo sciolto il problema s'inscriva nel dato cerchio un poligono regolare di un numero di lati eguale ad n, e sia DE il suo lato (Fig. 50.ª). Si guidino dal punto C i raggi CD, CE, e si prolunghino ai centri A, B dei cerchi ricercati, a cui debbono pervenire, supponendo

per la soluzione del problema, che i punti D, E sieno i punti di contatto dei cerchi. Si congiungano quindi i punti A, B colla retta AB, la quale passerà pel punto di contatto G (n.° 142 lib. 3.°). Si tiri perpendicolare a DE la retta CF, che segherà per mezzo la retta ED (n.° 133 lib. 3.°), e si prolunghi CF sino al punto G, a cui deve giugnere, perchè dee pure segare per mezzo la retta AB.

Facciasi $CD = a$; $CF = b$; $DE = c$; $AD = x$. Sarà $AB = 2x$. Nel triangolo rettangolo CAG si avrà l' equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(CG)^2 = (CA)^2 - (AG)^2 = (CD + DA)^2 - (AG)^2$$

Analiticamente . . . . $(CG)^2 = (a + x)^2 - x^2 = a^2 + 2ax$

Presa la radice positiva $CG = \sqrt{(a^2 + 2ax)}$

Pei triangoli simili ACB, DCE si avrà la proporzione

$$CF : DE :: CG : AB$$

Analiticamente . . . . $b : c :: \sqrt{(a^2 + 2ax)} : 2x$ (M)

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si quadri l'equazione, che ne risulta. 3.° Si sottragga $2ac^2x$. 4.° Si divida per $4b^2$. 5.° Si compisca il quadrato del 1.° membro. 6.° Si estragga la radice positiva. 7.° Si aggiunga $\frac{ac^2}{4b^2}$. 8.° Ridotto il 2.° membro ad un solo fattore si avrà finalmente

$$x = \frac{ac}{4b^2}\left(c + \sqrt{(4b^2 + c^2)}\right) \qquad (N)$$

E questa sarà la formola pel raggio de' cerchi, che vogliousi circoscrivere al cerchio dato.

Costruzione

Si prolunghi CF' in H, cosicchè sia $CH = 2\,CF' = 2b$, essendo $CF = CF'$; e si alzi al punto H la retta MH perpendicolare a CH, ed eguale a DE, ossia analiticamente eguale a c. Il punto M dovrà cadere sul prolungamento della retta CD', (poichè avendosi la proporzione $CF' : F'D' :: CH : HM$, se CH è uguale a $2CF$, o $2CF'$, ch' è poi lo stesso, sarà anche $HM = 2D'F$). Ora nel triangolo rettangolo MCH si ha l'equazione (luogo citato)

$$(MC)^2 = (CH)^2 + (HM)^2$$

Analiticamente . . . . . $(MC)^2 = 4b^2 + c^2$

Presa la radice positiva . . . . $MC^2 = \sqrt{(4b^2 + c^2)}$

Aggiunta per diritto alla MC la retta MN = MH, riescirà

$$NC = MN + MC = DE + MC = c + \sqrt{(4b^2 + c^2)}$$

Per abbreviare i calcoli facciasi $c + \sqrt{(4b^2 + c^2)} = \varphi$. Il valore della x diventerà $\frac{ac\varphi}{4b^2}$, ossia $\frac{a\varphi}{2b} \times \frac{c}{2b}$. S'incominci a fare $\frac{a\varphi}{2b} = p$. Posta in proporzione questa equazione si avrà

$$2b : a :: \varphi : p$$

Uniti pertanto i punti N, H colla retta NH, e condotta dal punto O la retta OP parallela ad NH si avrà la proporzione (n.° 231 lib. 5.°)

$$CH : CO :: CN : CP$$

Analiticamente . . . . $2b : a :: \varphi : CP = \frac{a\varphi}{2b}$

Sarà pertanto $CP = p$. Ciò posto: il valore della x muterassi in quest'altro $x = \frac{cp}{2b}$, dalla quale equazione si ottiene l'analogia

$$2b : c :: p : x$$

Presa dunque $CL = DE = D'E' = c$, e uniti i punti P, H colla retta PH, si conduca dal punto L parallela ad essa la retta LQ, e sarà CQ il valore della x; poichè si ha la proporzione

$$CH : CL :: CP : CQ$$

Analiticamente . . . . . $2b : c :: p : CQ = \frac{cp}{2b} = x$

Aggiunta per diritto al raggio CD' la retta $D'A' = CQ$, si faccia centro in C, e col raggio CA' si descriva un cerchio. Presa poi la retta A' B' doppia della A' D' si replichi essa n volte sulla periferia del nuovo cerchio or ora descritto, talchè n'emerga un poligono di n lati inscritto in quel cerchio. Tutti gli angoli di questo poligono presi pei centri, e presa per raggio una retta costante uguale ad A' D' si descrivano altrettanti cerchi, e riusciranno eguali, di numero n, tangenti fra loro, e tangenti al dato cerchio. C. D. F.

Osservazione I.ª

Se fosse dato un cerchio, e vi si volesse inscrivere una corona di cerchi uguali, di numero n, tangenti fra loro, e tangenti al dato, la formola superiormente trovata servirebbe all'uopo con un semplice cambia-

mento di un segno positivo in un negativo. Supponendo infatti, che il cerchio dato sia quello, che ha per raggio CD'', e supponendo già sciolto il problema, ossia già inseritta la corona di cerchi, congiunti i centri di due d'essi cerchi colla retta A'' B'', si conduca CF'' perpendicolare sulla retta D'' E'', ch'è lato del poligono di un numero n di lati inscritto nel dato cerchio.

Facciasi quindi $CD' = a$; $CF'' = b$; $D''E'' = c$; $A''D'' = x$

Sarà $A''B'' = 2x$; e $CA'' = a - x$. Nel triangolo rettangolo CA'' G'' si avrà l'equazione

$$CG'' = \sqrt{((CA'')^2 - (A''G'')^2)} = \sqrt{((a-x)^2 - x^2)} = \sqrt{(a^2 - 2ax)}$$

Conseguentemente nella proporzione

$$CF'' : D''E'' :: CG'' : A''B''$$

sostituiti i valori analitici si avrà

$$b : c :: \sqrt{(a^2 - 2ax)} : 2x$$

Posta questa proporzione in equazione, e maneggiata come si è fatto con (M) si troverà

$$x = \frac{ac}{4b^2}\left(-c + \sqrt{(4b^2 + c^2)}\right)$$

formola, che pel solo segno di c diversifica dalla superiore (N). Per la costruzione pertanto della figura si terrà lo stesso andamento di prima, e dopo aver trovato $CM' = \sqrt{(4b^2 + c^2)}$ invece di aggiugnervi $M'N' = M'H' = c$, si deve a CM' togliere questa retta, per cui resterà $CN' = -c + \sqrt{(4b^2 + c^2)}$. Trovata poi CQ' retta, di cui si cerca, si tolga dal raggio dato CD''' la retta $D'''A''' = CQ'$, e col raggio CA''' formato il cerchio si operi come si è fatto nella prima soluzione.

Osservazione II.ª

Benchè il numero n siasi posto indeterminatamente per generalizzare il problema, giova però avvertire, che non si può dare ad n qualunque valore; ma dovrà essere n un numero tale, che possa di un egual numero di lati inscriversi nel cerchio un poligono regolare. Quindi potrassi coronare il cerchio con 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 .... cerchi, e non già con 7, 9, 11 ecc.

PROBLEMI D'INSCRIZIONE E DI CIRCOSCRIZIONE DI FIGURE REGOLARI AD ALTRE DATE FIGURE REGOLARI

Problema LIV.

Inscrivere un quadrato in un pentagono regolare. (Fig. 51.ª tav. 4.ª)

Soluzione

Abbiasi il pentagono regolare ABCDE (Fig. 51.ª), e vogliasi in esso inscrivere un quadrato. Supponendo sciolto il problema sia FMLK il chiesto quadrato. Dal punto B si abbassi la perpendicolare BN, e si prolunghi BN indefinitivamente. Quindi prolunghisi il lato AE per diritto ad incontrare in H la BN prolungata. Dal punto A al punto C si guidi la retta AC. Sia $AB = a$; $BH = b$; $AC = c$; $BF = x$. Sarà $AF = AB - BF = a - x$

Pei triangoli simili ABC, FBM si avrà la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$AB : AC :: BF : FM$$

Analiticamente . . . . . $a : c :: x : FM = \frac{cx}{a}$

E dagli altri triangoli simili ABH, AKF si avrà la proporzione

$$AB : BH :: AF : FK$$

Analiticamente . . . . . $a : b :: a - x : FK = \frac{b}{a}(a - x)$

Ma per condizione del problema debb' essere $FM = FK$. Dunque sostituiti i valori analitici si avrà l' equazione

$$\frac{cx}{a} = \frac{ab - bx}{a}$$

1.° Si moltiplichi per a. 2.° Si aggiunga bx. 3.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 4.° Si divida per $c + b$, e sarà

$$x = \frac{ab}{c + b}$$

Costruzione

Prendasi $HV = AC = c$, e si congiunga il punto A col punto V per mezzo della retta AV. Si guidi ad essa dal punto H la retta HF parallela; il punto F così determinato ci darà $FB = x$. Ne' triangoli simili infatti FBH, ABV si ha la proporzione (n.° 231 lib. 5.°)

$$BV : BH :: AB : BF$$

Ma $BV = BH + HV$. Dunque . . . $BH + HV : BH :: AB : BF$

Analiticamente . . . . . $c + b : b :: a : BF = \frac{ab}{c+b} = x$

Condotta pertanto dal punto F la retta FM parallela ad ED, e dai punti F, M abbassate le rette FK, ML parallele a BH, e congiunta la retta KL si troverà inscritto il quadrato nel dato pentagono. C. D. F.

Problema LV.

In un dato quadrato inscrivere un pentagono regolare. (Fig. 52.ª tav. 4.ª)

Soluzione

La soluzione di questo problema è impossibile. Sia dato infatti il quadrato ABCD (Fig. 52.ª), e in esso suppongasi inscritto il pentagono EFKHG. Unendo i punti F, G colla retta FG è chiaro, che questa riescirà parallela ad AB, e sarà quindi $FG = AB$. Dal punto E si abbassi la perpendicolare EL, ed uniti i punti E, K colla retta EK, sarà pure $EL = AD = AB$. Ma in un pentagono regolare debb' essere $FG = KE$. Dunque riescirebbe pure $EL = EK$. Il che è evidentemente assurdo. Dunque in un quadrato è impossibile inscrivere un pentagono regolare.

Problema LVI.

Inscrivere un triangolo equilatero in un pentagono regolare. (Fig. 53.ª tav. 4.ª)

Soluzione

Dato il pentagono ABC'DE vuolsi in esso inscrivere il triangolo equilatero BGF (Fig. 53.ª n.° 1.°). Si congiungano i punti A, C' colla

retta AC', e dal punto B si abbassi la perpendicolare BC. Dal punto E si guidi EQ parallela a BC, e si supponga inscritto il triangolo equilatero BGF.

Sia $BC = a$; $EQ = b$; $AQ = c$; $ED = d$; $BF = x$

Nel triangolo rettangolo FLB si avrà l'equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(BL)^2 = (FB)^2 - (FL)^2$$

Analiticamente. . . . . $(BL)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{4x^2 - x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$

Presa la radice positiva . . $BL = \sqrt{\left(\frac{3x^2}{4}\right)} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

Si avrà quindi $CL = BC - BL = a - \frac{x\sqrt{3}}{2}$

Pei triangoli simili EQA, EKF si avrà la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$EQ : QA :: EK : KF$$

Analiticamente . . . $b : c :: a - \frac{x\sqrt{3}}{2} : KF = \frac{c}{b}\left(a - \frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$

Se si alzi ora dal punto D la retta DP parallela a BC, i due triangoli EKF, HDG risulteranno eguali, perchè sono equiangoli, ed hanno inoltre il lato $EK = DH$ (n.° 69 lib. 1.°). Dunque sarà $FK = GH$. Ciò posto: avrassi

$$GF = FK + KH + HG = 2FK + KH = 2FK + ED$$

Ed analiticamente si avrà l'equazione

$$x = \frac{2c}{b}\left(a - \frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + d$$

1.° Si eseguisca l'accennata moltiplica. 2.° Si moltiplichi per b. 3.° Si aggiunga $cx\sqrt{3}$. 4.° Si sciolga la x ne' suoi fattori. 5.° Si divida per $b + c\sqrt{3}$, e sarà

$$x = \frac{2ac + bd}{b + c\sqrt{3}}$$

E facendo $bd = ah$ sarà $x = \frac{2ac + ah}{b + c\sqrt{3}} = a\left(\frac{2c + h}{b + c\sqrt{3}}\right)$

Costruzione

Per costruire il valore della x bisogna primamente trovar quello di h. Essendosi fatto $bd = ah$ si avrà la proporzione

$$a : b :: d : h$$

Presa pertanto (Fig. 53.ª n.° 2.°) $BR = QE = b$, e congiunta la retta CC' si guidi da R la retta RS parallela a CC'. I due triangoli simili CBC', RBS danno l'analogia (n.° 231 lib. 5.°)

$$BC : BR :: BC' : BS$$

Analiticamente . . . . . $a : b :: d : BS = \frac{bd}{a} = h$

Prolungato il lato BC' indefinitamente prendasi $Bm = BS + 2AQ = h + 2c$. Dall' altra parte prolungata la retta EQ si prenda $QM = AQ$, e si unisca il punto M col punto A per mezzo della retta MA. Da M si alzi $MN = MQ = AQ$ perpendicolare ad AM. Nel triangolo rettangolo AMN si avrà l' equazione (luogo citato)

$$(AN)^2 = (AM)^2 + (MN)^2$$

Ma $(AM)^2 = (AQ)^2 + (QM)^2$. Dunque sarà pure $(AN)^2 = (AQ)^2 + (QM)^2 + (MN)^2$

Analiticamente . . . . . $(AN)^2 = c^2 + c^2 + c^2 = 3c^2$

Presa la radice positiva. . . . $AN = \sqrt{(3c^2)} = c\sqrt{3}$

Si segni ora sulla perpendicolare BC la retta $Bh = EQ + AN = b + c\sqrt{3}$; quindi si congiungano i punti h, m colla retta hm, e dal punto C si guidi la retta Cn parallela ad hm. Sarà Bn la retta, di cui si cerca. I triangoli simili infatti Bhm, BCn danno la proporzione (luogo citato)

$$Bh : BC :: Bm : Bn$$

Analiticamente. . . . . $b + c\sqrt{3} : a :: 2c + h : Bn = \frac{a(2c+h)}{b + c\sqrt{3}} = x$

Fatto centro in B, e coll'intervallo Bn descritto un arco segante ne' punti G, F i lati del dato pentagono, e tirate le rette BG, GF, FB risulterà il triangolo BGF equilatero inscritto nel dato pentagono. C. D. F.

Problema LVII.

Dato il pentagono ABCED si cerca di formare un triangolo equilatero HGF la cui base sia sul prolungamento della base DE del dato pentagono, ed i cui lati FH, HG passino pei punti A, C dello stesso pentagono. (Fig. 54.ª tav. 4.ª)

Soluzione.

Supposto sciolto il problema si abbassi dal vertice H (Fig. 54.ª n.° 1.°) la perpendicolare HL, si tiri la retta AC, e dai punti A, C si abbassino le perpendicolari AM, CN.

Facciasi IL $= a$; AI $= b$; FH $= x$.

Nel triangolo rettangolo FLH si avrà l'equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(HL)^2 = (FH)^2 - (FL)^2$$

Analiticamente . . . . . $(HL)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{4x^2 - x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$

Presa la radice positiva . . $HL = \sqrt{\left(\frac{3x^2}{4}\right)} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

Quindi sarà $HI = HL - IL = \frac{x\sqrt{3}}{2} - a$

I due triangoli simili FAM, AHI danno la proporzione (n. 234 lib. 5.°)

$$HI : AI :: AM : MF$$

Ma è AM = IL. Dunque. . . HI : AI :: IL : MF

Analiticamente . . . $\frac{x\sqrt{3}}{2} - a : b :: a : MF = \frac{ab}{\frac{x\sqrt{3}}{2} - a} = \frac{2ab}{x\sqrt{3} - 2a}$

I due triangoli FMA, CNG aventi gli angoli tutti eguali rispettivamente, e inoltre il lato AM = CN sono eguali. Dunque si avrà FM = NG. Conseguentemente sarà

$$FG = FM + MN + NG = 2\,FM + MN = 2\,FM + AC = 2\,FM + 2AI$$

E analiticamente . . . . . $x = \frac{4ab}{x\sqrt{3} - 2a} + 2b$

1.° Si moltiplichi per $x\sqrt{3} - 2a$. 2.° Si riduca il 2.° termine, ch'è semplificabile, e si aggiunga $2ax$ all'equazione, che n'emerge. 3.° Si divida per $x\sqrt{3}$, e sarà

$$x = 2b + \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

4.° Moltiplicando, e dividendo per a il rotto $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ si avrà finalmente

$$x = 2b + \frac{2a^2}{a\sqrt{3}} \qquad (Q)$$

Costruzione

Dividasi per 2 l'equazione (Q), e si avrà $\frac{x}{2} = b + \frac{a^2}{a\sqrt{3}}$

Si applichi (Fig. 54ª n.° 2.°) per diritto alla retta AC la retta $AK = AM = a$, e si congiungano i punti K, M colla retta KM. Dal punto K si alzi perpendicolare a KM la retta $KO = KA = a$, e si uniscano i punti O, M colla retta MO. Nel triangolo rettangolo OKM si avrà l'equazione (luogo citato)

$$(OM)^2 = (OK)^2 + (KM)^2$$

Ma $(KM)^2 = (AK)^2 + (AM)^2 = (AM)^2 + (AM)^2 = 2(AM)^2$; ed $(OK)^2 = (KA)^2 = (AM)^2$

Dunque si avrà pure. . . . $(OM)^2 = 3(AM)^2$

Analiticamente. . . . . $(OM)^2 = 3a^2$

Presa la radice positiva . . . . $OM = \sqrt{(3a^2)} = a\sqrt{3}$

Prendasi OM per diametro, e si descriva il suo corrispondente semicerchio: quindi dal punto M si addatti alla periferia la retta $MP = MA = a$. Dal punto P si abbassi sul diametro la perpendicolare PQ, e si avrà la proporzione (n.° 245 lib. 5.°)

$$OM : MP :: MP : MQ$$

Analiticamente . . . . . $a\sqrt{3} : a :: a : MQ = \frac{a^2}{a\sqrt{3}}$

Si prenda pertanto sulla base prolungata DE la retta $MF = MQ$. Sarà

$$FL = FM + ML = FM + AI = b + \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{x}{2}$$

E presa dall'altra parte la retta $LG = LF$ riuscirà

$$FG = FL + LG = b + \frac{a^2}{a\sqrt{3}} + b + \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = 2b + \frac{2a^2}{a\sqrt{3}} = x$$

Quindi condotte dai punti G, F pei punti C, A le rette GH, FH concorrenti in H, il triangolo HGF, che ne risulta, sarà il triangolo equilatero cercato. C. D. T.

Problema LVIII.

Dato il triangolo equilatero ABC vuolsi inscrivere in esso il pentagono regolare ENDIH in modo, che la sua base poggi sulla base del triangolo, ed i punti E, D tocchino i lati dello stesso triangolo. (Fig. 55.ª tav. 4.ª)

Soluzione

Supponendo sciolto il problema si uniscano i punti E, D colla retta ED (Fig. 55.ª), e si guidino dai punti istessi le perpendicolari EF, DG.

Dal punto A si abbassi la perpendicolare AL, e si congiungano i punti N, H colla retta NH.

Sia $AC = a$; $HI = x$; $NH = y$. In un pentagono regolare il lato HI è uguale alla parte maggiore della retta NH divisa in media, ed estrema ragione (vedi il problema 49.°). Dunque si avrà la proporzione

$$NH : HI :: HI : NH - HI$$

Analiticamente . . . . . $y : x :: x : y - x$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si compisca il quadrato del 1.° membro. 3.° Si prenda la radice positiva. 4.° Si aggiunga $\frac{x}{2}$, e semplificato il 2.° membro sarà

$$y = x\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Nel triangolo rettangolo NHL si ha l'equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(NL)^2 = (NH)^2 - (HL)^2$$

Presa la radice positiva.... $NL = \sqrt{\{(HN)^2 - (HL)^2\}}$

In questa ultima equazione sostituiti i valori analitici, per essere $HL = \frac{1}{2} HI = \frac{x}{2}$ si avrà

$$NL = \sqrt{\left\{x^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}\right\}} = \sqrt{\left\{\frac{x^2(6+2\sqrt{5})-x^2}{4}\right\}} = \sqrt{\left\{\frac{x^2(5+2\sqrt{5})}{4}\right\}} = \frac{x}{2}\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$$

Nell' altro triangolo rettangolo EMN si ha per lo stesso luogo l'equazione

$$(MN)^2 = (EN)^2 - (EM)^2$$

Presa la radice positiva . . . $MN = \sqrt{\{(EN)^2 - (EM)^2\}}$ (M)

Ma il pentagono essendo regolare sarà $ED = NH$; $EM = \frac{1}{2} ED$; $EN = HI$

Dunque sostituite queste linee in (M) si otterrà

$$MN = \sqrt{\left\{(HI)^2 - \frac{1}{4}(ED)^2\right\}}$$

Analiticamente

$$MN = \sqrt{\left\{x^2 - \frac{x^2}{4}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}} = \sqrt{\left\{\frac{x^2\left(16-(1+\sqrt{5})^2\right)}{16}\right\}} = \frac{x}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$$

Sarà conseguentemente

$$ML = LN - MN = \frac{x}{2}\sqrt{(5+2\sqrt{5})} - \frac{x}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})} = \frac{x}{4}\left(2\sqrt{(5+2\sqrt{5})} - \sqrt{(10-2\sqrt{5})}\right)$$

Per rendere più semplice questo valore, prescindendo dalla quantità x,

che v'introdurremo a suo tempo, si moltiplichi esso, e dividasi per $\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$, e si avrà

$$\frac{(2\sqrt{5+2\sqrt{5}})(\sqrt{10-2\sqrt{5}})-(10-2\sqrt{5})}{4\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}=\frac{\sqrt{(30+10\sqrt{5})}-(5-\sqrt{5})}{2\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}$$

Ossia $\frac{\sqrt{(5(6+2\sqrt{5}))}-(5-\sqrt{5})}{2\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}=\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{5}-5+\sqrt{5}}{2\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}=\frac{\sqrt{5}(2+\sqrt{5})-5}{2\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}=$

$$\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}=\sqrt{\left\{\frac{25}{10(5-\sqrt{5})}\right\}}=\sqrt{\left\{\frac{25.2}{4.5(5-\sqrt{5})}\right\}}=\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}}$$

Sarà pertanto il valore ridotto di $ML=\frac{5x\sqrt{2}}{2\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}}$

Dunque $AM=AL-ML=b-\frac{5x\sqrt{2}}{2\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}}$

Nei triangoli simili AME, EFC si ha la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$AM : EM :: EF : CF$$

Ma EF=ML. Dunque . . . AM : EM :: ML : CF

Analiticamente.. $b-\frac{5x\sqrt{2}}{2\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}} : x\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) :: \frac{5x\sqrt{2}}{2\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}} : CF$

Moltiplicando gli antecedenti per $2\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}$ si avrà

$$2b\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}-5x\sqrt{2} : x\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) :: 5x\sqrt{2} : CF$$

Moltiplicando per 4 la 1.ª ragione sarà

$$8b\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}-20x\sqrt{2} : x(1+\sqrt{5}) :: 5x\sqrt{2} : CF$$

Fatto quindi il prodotto de' medj, e diviso pel 1.° termine si avrà

$$CF=\frac{x^2(1+\sqrt{5})5\sqrt{2}}{8b\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}-20x\sqrt{2}}$$

Essendo inoltre CF=GB, sarà CB=2CF+FG=2CF+ED, e quindi

$$CB=AC=\frac{x^2(1+\sqrt{5})5\sqrt{2}}{4b\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}-10x\sqrt{2}}+x\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=a$$

Ritenuta questa equazione analitica si elimini da essa ogni denominatore, e si ridurrà all' espressione seguente

$$x^2(1+\sqrt{5})5\sqrt{2}+2bx(1+\sqrt{5})\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}-x^2(1+\sqrt{5})5\sqrt{2}=4ab\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}-10ax\sqrt{2}$$

Riducendo . . . . . $2bx(1+\sqrt{5})\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}=4ab\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}-10ax\sqrt{2}$

Dividendo per $2\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}$ . . . . . $bx(1+\sqrt{5})=2ab-\dfrac{ax\sqrt{10}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$

Moltiplicando per $\sqrt{(5-\sqrt{5})}$ . . . $bx(1+\sqrt{5})(\sqrt{(5-\sqrt{5})})=2ab\sqrt{(5-\sqrt{5})}-ax\sqrt{10}$ (φ)

Ma è $(1+\sqrt{5})(\sqrt{(5-\sqrt{5})})=\sqrt{\{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2\}}=\sqrt{\{(5-\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})\}}$

E riducendo $\sqrt{(20+4\sqrt{5})}=\sqrt{\{4(5+\sqrt{5})\}}=2\sqrt{(5+\sqrt{5})}$

Dunque sostituito questo valore al coefficiente della quantità bx in (φ) si avrà

$$2bx\sqrt{(5+\sqrt{5})}=2ab\sqrt{(5-\sqrt{5})}-ax\sqrt{10}$$

Aggiugnendo $ax\sqrt{10}$, e sciogliendo la x ne' suoi fattori si otterrà

$$x\left(2b\sqrt{(5+\sqrt{5})}+a\sqrt{10}\right)=2ab\sqrt{(5-\sqrt{5})} \qquad (\lambda)$$

Ora riflettendo essere $b=\frac{a}{2}\sqrt{3}$, perchè b rappresenta la perpendicolare abbassata sulla base di un triangolo equilatero, il cui lato è a, e sostituendo questo valore in (λ) sarà

$$x\left(a\sqrt{3(5+\sqrt{5})}+a\sqrt{10}\right)=a^2\sqrt{3(5-\sqrt{5})}$$

Si moltiplichi per $\sqrt{(5-\sqrt{5})}$ . . . $x\left(a\sqrt{3.20}+a\sqrt{10(5-\sqrt{5})}\right)=a^2\sqrt{15(6-2\sqrt{5})}$

Si divida pel coefficiente della x, e prendasi l'attuale radice col doppio segno della quantità $6-2\sqrt{5}$; si avrà

$$x=\frac{a^2(\pm 1\mp\sqrt{5})\sqrt{15}}{a\sqrt{(3.20)}+a\sqrt{(10(5-\sqrt{5}))}}=\frac{(-a+\sqrt{(5a^2)})\sqrt{(3(5a^2))}}{2\sqrt{(3.5a^2)}+\sqrt{\left(2.5a\left(5a-\sqrt{(5a^2)}\right)\right)}}$$

$$=\frac{(-a+\sqrt{(5a^2)})\frac{1}{4}\sqrt{(3.(5a^2))}}{\frac{1}{2}\sqrt{(3.(5a^2))}+\frac{1}{4}\sqrt{\left(2.5a\left(5a-\sqrt{(5a^2)}\right)\right)}}$$

Costruzione

Prendasi la retta $BK = 6a$, e fatto su di essa, come diametro, il corrispondente semicerchio, si alzi dal punto C la normale CR. Si avrà (n.° 120 lib. 2.°)

$$(CR)^2 = KC \times CB$$

Analiticamente . . . . . $(CR)^2 = 5a^2$

Fatto sulla HC il suo corrispondente semicerchio, e presa $CO = CR$ si alzi l'altra normale OP; quindi congiungansi i punti K, P colla retta KP. Si avrà (n.° 245 lib. 5.°)

$$(KP)^2 = KC \times KO = KC\,(KC - OC) = KC\,(KC - CR)$$

Analiticamente . . . $(KP)^2 = 5a\left(5a - \sqrt{(5a^2)}\right)$

Congiungansi i punti P, C colla retta PC, e si prolunghi questa retta in Q, onde sia $PQ = PK$. Quindi da K a Q si tiri la retta KQ. Pel triangolo rettangolo KPQ si avrà l'equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(KQ)^2 = (KP)^2 + (PQ)^2 = 2\,(KP)^2$$

E presa analiticamente la radice positiva sarà

$$KQ = \sqrt{\left(2 \,.\, 5a\left(5a - \sqrt{(5a^2)}\right)\right)}$$

Prendasi la retta SQ, che sia la quarta parte di KQ, e si avrà

$$SQ = \frac{1}{4}\sqrt{\left(2 \,.\, 5a\left(5a - \sqrt{(5a^2)}\right)\right)} = \varphi'$$

Dal punto R si alzi la retta $RT = CR$, e ad essa perpendicolare; e si uniscano i punti T, C colla retta CT. Dal punto T si alzi la retta $TX = TR$, e perpendicolare a TC; quindi si congiungano i punti X, C colla retta CX. Pe' triangoli rettangoli TRC, XTC si avrà l'equazione

$$XC = \sqrt{\left(3\,(RC)^2\right)}$$

Analiticamente . . . . . $XC = \sqrt{\left(3\sqrt{(5a^2)}\right)}$

E presa UC metà di CX sarà

$$\frac{1}{2}\,CX = UC = \frac{1}{2}\sqrt{\left(3\sqrt{(5a^2)}\right)} = \pi$$

Dalla retta $OC = \sqrt{(5a^2)}$ si tolga $OY = a$, e resterà $YC = -a + \sqrt{(5a^2)} = (\lambda')$

Si divida pure UC per metà nel punto V, e sarà $VC = \frac{1}{4}\sqrt{\left(3\sqrt{(5a^2)}\right)} = \omega$

Poscia si segni sopra CX il punto Z prendendo per diritto ad VC la retta UZ = SQ, e congiungansi i punti Z, Y colla retta ZY, e ad essa pel punto V si guidi la parallela ΣV. Pei triangoli simili ZCY, VCΣ si avrà la proporzione (n.° 231 lib. 5.°)

$$CZ : CV :: CY : C\Sigma$$

Analiticamente . . . . . $\pi + \varphi' : \omega :: \lambda' : C\Sigma$

Fatto il prodotto de' medj, e diviso pel 1.° termine sarà

$$C\Sigma = \frac{\omega\lambda'}{\pi + \varphi'} = \frac{\left(-a + \sqrt{(5a^2)}\right)\frac{1}{4}\sqrt{\left(3.(5a^2)\right)}}{\frac{1}{2}\sqrt{\left(3.(5a^2)\right)} + \frac{1}{4}\sqrt{\left(2.5a\left(5a - \sqrt{(5a^2)}\right)\right)}} = x$$

Preso ora $LH = \frac{1}{2} C\Sigma$, facciasi LI = LH, e coi punti H, I presi pei centri, fatto HI il raggio, si determinino sui lati CA, AB i punti E, D. Quindi fatto centro in E, e preso EH per raggio si determini il punto N; uniti questi punti n' emergerà il pentagono regolare, di cui si cercava. C. D. F.

Problema LIX.

Circoscrivere ad un quadrato un triangolo equilatero per modo, che la base del triangolo sia sul prolungamento della base del quadrato. (Fig. 56.ª tav. 4.ª)

Soluzione

Sia ABDC (Fig. 56.ª) il dato quadrato, e suppongasi EFG il chiesto triangolo. I due triangoli AFC, BDG sono eguali, perchè vi ha l'angolo EFG, che debbe uguagliare l'angolo EGF per condizione del problema, gli angoli BDG, ACF sono retti, ed è il lato AC = BD (n.° 69 lib. 1.°). Sarà dunque FC = DG. Abbassando dal vertice E la perpendicolare EH sulla base riuscirà FH = HG, e quindi CH = HD.

Facciasi FE = FG = x; AB = a. Sarà $FH = \frac{x}{2}$; $FC = \frac{x-a}{2}$

E pel triangolo rettangolo EFH avendosi l'equazione (n.° 101 lib. 1.°).

$$EH = \sqrt{\{(FE)^2 - (FH)^2\}}$$

Analiticamente sarà ... $EH = \sqrt{\left(x^2 - \frac{x^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{4x^2 - x^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{3x^2}{4}\right)} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

Ma i triangoli simili FEH, FAC danno l'analogia (n.° 234 lib. 5.°)

$$EH : FH :: AC : FC$$

Dunque analiticamente si avrà . . . $\frac{x\sqrt{3}}{2} : \frac{x}{2} :: a : \frac{x-a}{2}$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si divida per $\frac{x}{2}$ 3.° Si moltiplichi per 2. 4.° Si aggiunga $a\sqrt{3}$. 5.° Si divida per $\sqrt{3}$, e sarà

$$x = a + \frac{2a}{\sqrt{3}} = a + \frac{2}{3}\sqrt{(3a^2)}$$

Costruzione

Prima di costruire questo valore si osservi, che si ha $FG = x = 2FC + CD$, e ch'è quindi $2FC + CD = a + \frac{2}{3}\sqrt{(3a^2)}$, ossia $2FC + a = a + \frac{2}{3}\sqrt{(3a^2)}$, donde $FC = \frac{1}{3}\sqrt{(3a^2)}$. Da questa osservazione ricavasi, che il problema sarà costruito, ove ritrovisi il valore di FC, che si porrà poi in diritto alla base del quadrato da una parte, e dall'altra per ottenere la base FG del triangolo cercato.

A tale oggetto condotta la diagonale CB s'innalzi al punto B su di essa la retta LB perpendicolare a CB, ed uguale a BA. Quindi si congiungano i punti L, C colla retta LC. Si divida LC in tre parti eguali, e sia MC una terza parte. Producasi la retta CD dall'una, e dall'altra parte indefinitamente, e col centro C, presa CM per raggio, si descriva l'arco FM. Riuscirà $FC = \frac{1}{3}\sqrt{(3a^2)}$. Nel triangolo rettangolo infatti CBL si ha l'equazione (luogo citato)

$$CL = \sqrt{\{(CB)^2 + (BL)^2\}}$$

Ma $(CB)^2 = (CA)^2 + (AB)^2$. Dunque $CL = \sqrt{\{(CA)^2 + (AB)^2 + (BL)^2\}}$
Ma $CA = AB = BL = a$. Dunque $CL = \sqrt{(3a^2)}$. Quindi per essere CM la terza parte di CL, ed uguale ad FC, sarà $FC = \frac{1}{3}\sqrt{(3a^2)}$

Conseguentemente presa $DG = FC$, e condotte le rette FA, GB, che prodotte s'incontrano in E, sarà EGF il triangolo equilatero circoscritto al quadrato posto sul prolungamento della base d'esso quadrato. C. D. T.

Problema LX.

In un dato quadrato inscrivere un triangolo equilatero. (Fig. 57.ª tav. 4.ª)

Soluzione

Sia ABDC (Fig. 57.ª) il quadrato, e si supponga EFD il triangolo equilatero cercato. Egli è evidente essere FC = EB, poichè queste due rette sono ambedue eguali all'espressione $\sqrt{\{(ED)^2-(BD)^2\}}$, per essere ED = FD, e BD = CD. Da qui si deduce esser parimenti AF = AE. Condotte quindi le diagonali CB, AD, sarà FE tagliata per metà in H, come è tagliata per metà CB in K

Facciasi FE = FD = ED = x ; AB = a. Si avrà l'equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(CB)^2=(AB)^2+(AC)^2=2(AB)^2$$

Presa analiticamente la radice positiva . . . $CB=\sqrt{(2a^2)}=a\sqrt{2}$

I triangoli simili AEH, ABK danno l'analogia (n.° 234 lib. 5.°)

$$KB : AK :: HE : HA$$

Ma KB = AK. Dunque sarà pure HE = HA. Ma è $HE=\frac{1}{2}FE=\frac{x}{2}$

Dunque $HA=\frac{x}{2}$. Si ha inoltre pel triangolo rettangolo FHD (luogo citato) l'equazione

$$(HD)^2=(FD)^2-(FH)^2$$

Analiticamente. . . . . $(HD)^2=x^2-\frac{x^2}{4}=\frac{4x^2-x^2}{4}=\frac{3x^2}{4}$

Sarà dunque presa la radice positiva . . . $HD=\sqrt{\left(\frac{3x^2}{4}\right)}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$

Ma si ha AH + HD = AD = CB. Dunque sostituiti i valori analitici a questa ultima equazione sarà

$$\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{2}$$

1.° Si sottragga $\frac{x}{2}$. 2.° Si quadri l'equazione. 3.° Si sottragga $\frac{x^2}{4}$, e si avrà

$$\frac{2x^2}{4}=2a^2-ax\sqrt{2}\text{ ; ossia }\frac{x^2}{2}=2a^2-ax\sqrt{2}$$

4.° Si moltiplichi per 2. 5.° Si aggiunga $2ax\sqrt{2}$. 6.° Si compisca il quadrato. 7.° Si estragga la radice positiva. 8.° Si sottragga $a\sqrt{2}$, e sarà

$$x=-a\sqrt{2}+\sqrt{6a^2}=-a\sqrt{2}+a\sqrt{6}$$

Costruzione

Per costruire questo valore s'innalzi sulla diagonale AD una perpendicolare AG = AD, e si uniscano i punti D, G colla retta DG.

Sopra DG s'innalzi GL perpendicolarmente, e sia anche $GL = AD$. Per essere $AD = a\sqrt{2}$, riuscirà

$$DG = \{\sqrt{(AD)^2 + (AG)^2}\} = \sqrt{(2a^2 + 2a^2)} = \sqrt{(4a^2)} = 2a$$

Si uniscano i punti L, D colla retta LD, e si avrà

$$DL = \sqrt{\{(DG)^2 + (GL)^2\}} = \sqrt{(4a^2 + 2a^2)} = \sqrt{(6a^2)} = a\sqrt{6}$$

Ora col centro in L, e coll'intervallo LG per raggio si descriva l'arco GM, che vada a tagliare LD in M, resterà

$$DM = LD - LM = LD - LG = a\sqrt{6} - a\sqrt{2} = x$$

Per conseguenza col centro D, e col raggio DM descritto l'arco MN, questo taglierà i lati del quadrato nei punti E, F, i quali congiunti col punto D, ed uniti fra loro ci daranno il triangolo equilatero richiesto, essendo $DM = ED = FD = x$

Problema LXI.

Dato un triangolo circoscrivervi un quadrato. (Fig. 58.ª tav. 4.ª)

Soluzione

Sia dato il triangolo EFD (Fig. 58.ª n.° 1.°), e vi si voglia circoscrivere il quadrato ABDC

Facciasi $ED = a$; $EF = b$; $FD = c$; $BD = x$

Nel triangolo rettangolo EBD si avrà l'equazione (n.° 101 lib. 1.°)

$$(EB)^2 = (ED)^2 - (DB)^2$$

Analiticamente. . . . . $(EB)^2 = a^2 - x^2$

Presa la radice positiva. . . $EB = \sqrt{(a^2 - x^2)}$

Sarà quindi . . . . . $AE = AB - EB = x - \sqrt{(a^2 - x^2)}$

Similmente si avrà . . . $AF = \sqrt{\{(FE)^2 - (AE)^2\}} = \{\sqrt{b^2 - (x - \sqrt{(a^2 - x^2)})^2}\}$

Ed eseguito il quadrato . $AF = \sqrt{\{b^2 - a^2 + 2x\sqrt{(a^2 - x^2)}\}}$ (φ)

Sarà pure . . . . . $FC = \sqrt{\{(FD)^2 - (CD)^2\}} = \sqrt{(c^2 - x^2)}$

Donde . . . . . $AF = AC - FC = x - \sqrt{(c^2 - x^2)}$ (φ')

Paragonando (φ), e (φ') . . . . $\sqrt{\{b^2 - a^2 + 2x\sqrt{(a^2 - x^2)}\}} = x - \sqrt{(c^2 - x^2)}$

1.° Si quadri l'equazione. 2.° Si cambino tutti i segni. 3.° Si aggiunga c^2, e $2x\sqrt{(a^2 - x^2)}$. 4.° Si sottragga $2x\sqrt{(c^2 - x^2)}$, e si avrà

$$a^2 + c^2 - b^2 - 2x\sqrt{(c^2 - x^2)} = 2x\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

5.° Facciasi $a^2 - b^2 + c^2 = m^2$, e l'equazione si cambierà in quest' altra

$$m^2 - 2x\sqrt{(c^2 - x^2)} = 2x\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

6.° Si quadri l'equazione. 7.° Si riducano tutti i termini omogenei, e si avrà

$$m^4 + 4x^2(c^2 - a^2) = 4m^2x\sqrt{(c^2 - x^2)}$$

8.° Si quadri di nuovo. 9.° Si riducano x^4, ed x^2 sotto un solo fattore rispettivamente, e tutte nel 1.° membro, e si otterrà

$$x^4\left\{16\left(m^4 + (c^2 - a^2)^2\right)\right\} - x^2\left\{8\left(m^4a^2 + m^4c^2\right)\right\} = -m^8$$

10.° Si divida pel coefficiente del 1.° termine, e sarà

$$x^4 - x^2\left\{\frac{m^4(a^2 + c^2)}{2\left(m^4 + (c^2 - a^2)^2\right)}\right\} = -\frac{m^8}{16\left(m^4 + (c^2 - a^2)^2\right)} \qquad (\varphi'')$$

11.° Facciasi $\frac{m^4(a^2 + c^2)}{2\left(m^4 + (c^2 - a^2)^2\right)} = \pi^2$; e $\frac{m^8}{16\left(m^4 + (c^2 - a^2)^2\right)} = \lambda^4$

e l'equazione (φ'') si trasformerà nella seguente

$$x^4 - \pi^2x^2 = -\lambda^4$$

12.° Si compisca il quadrato. 13.° Si estragga la radice. 14.° Si aggiunga $\frac{\pi^2}{2}$.

15.° Si estragga nuovamente la radice, e sarà

$$x = \pm\sqrt{\left\{\frac{\pi^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\pi^4}{4} - \lambda^4\right)}\right\}}$$

16.° Sostituiti i valori, che corrispondono alle quantità π^4, π^2, λ^4 si avrà

$$x = \pm\sqrt{\left\{\frac{m^4(a^2 + c^2)}{4\left(m^4 + (c^2 - a^2)^2\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{m^8(a^2 + c^2)^2}{16\left(m^4 + (c^2 - a^2)^2\right)^2} - \frac{m^8}{16\left(m^4 + (c^2 - a^2)^2\right)}\right)}\right\}}$$

$$= \pm\sqrt{\left\{\frac{m^4(a^2 + c^2)}{4\left(m^4 + (c^2 - a^2)^2\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{m^8(a^2 + c^2)^2 - m^8\left(m^4 + (c^2 - a^2)^2\right)}{16\left(m^4 + (c^2 - a^2)^2\right)^2}\right)}\right\}}$$

$$= \pm\sqrt{\left\{\left(\frac{m^4}{4\left(m^4 + (c^2 - a^2)^2\right)}\right)\left(a^2 + c^2 \pm \sqrt{(a^2 + c^2)^2 - m^4 - (c^2 - a^2)^2}\right)\right\}}$$

Ora la quantità $(a^2 + c^2)^2 - m^4 - (c^2 - a^2)^2$ riducendosi all' espressione seguente

$$4a^2c^2 - m^4, \text{ ossia } (2ac - m^2)(2ac + m^2)$$

e sostituito ad m^2 il suo valore $a^2+c^2-b^2$, trasformandosi in quest'altra

$$\left(2ac-a^2-c^2+b^2\right)\left(2ac+a^2+c^2-b^2\right)=\left(b^2-(a-c)^2\right)\left((a+c)^2-b^2\right)$$
$$=\left(b-a+c\right)\left(b+a-c\right)\left(a+c-b\right)\left(a+b+c\right)$$

Fatto $a+b+c=p$, ossia fatto p tutto il perimetro del triangolo, quell'espressione diverrà

$$p\left(p-2a\right)\left(p-2c\right)\left(p-2b\right)=16\left\{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)\right\} \qquad \text{(M)}$$

E l'ultima formola trovata per x sarà

$$x=\pm\sqrt{\left\{\left(\frac{m^4}{4\left(m^4+(c^2-a^2)^2\right)}\right)\left(a^2+c^2\pm\sqrt{16\left\{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)\right\}}\right)\right\}}$$

Ossia

$$x=\pm\sqrt{\left\{\left(\frac{m^4}{4\left(m^4+(c^2-a^2)^2\right)}\right)\left(a^2+c^2\pm 4\sqrt{\left\{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)\right\}}\right)\right\}}$$

Ma la formola (M) è l'espressione dell'area del triangolo pe' suoi lati (Vedi il problema 33.°). Dunque quell'ultimo radicale esprimerà un'area quadrupla di quella del triangolo. Se dunque chiameremo d l'altezza DO del triangolo FED, potremo mettere $\pm 2bd$ invece dell'accennato radicale, giacchè $2bd$ è il quadruplo dell'area del triangolo avente per base b, e per altezza d. Si avrà dunque

$$x=\pm\sqrt{\left\{\frac{m^4(a^2+c^2\pm 2bd)}{4\left(m^4+(c^2-a^2)^2\right)}\right\}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{m^2(a^2+c^2\pm 2bd)}{m^2+\frac{1}{m^2}\left(c^2-a^2\right)^2}\right\}}$$

e sostituito ad m^2 il suo valore si avrà finalmente

$$x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{(a^2+c^2-b^2)(a^2+c^2\pm 2bd)}{a^2+c^2-b^2+\frac{(c^2-a^2)^2}{a^2+c^2-b^2}}\right\}}$$

Costruzione

Abbiasi il triangolo DEF (Fig. 58.ª n.° 2.°); e ritengansi le denominazioni, che si sono fatte superiormente. Sulla DF, presa per diametro, si descriva il suo corrispondente semicerchio, e si applichi in esso dal

punto D la corda $DQ = DE = a$. Nel triangolo rettangolo FQD si avrà (n.° 101 lib. 1.°)

$$(FQ)^2 = (FD)^2 - (DQ)^2 = (FD)^2 - (DE)^2$$

Presa la radice positiva $FQ = \sqrt{\{(FD)^2 - (DE)^2\}}$

Analiticamente . . . . . $FQ = \sqrt{(c^2 - a^2)}$

Si alzi la retta DG perpendicolare ad FD, ed uguale a DE; e si congiungano i punti F, G colla retta FG. Nel triangolo rettangolo FDG si avrà (luogo citato)

$$FG = \sqrt{\{(FD)^2 + (DG)^2\}} = \sqrt{\{(FD)^2 + (DE)^2\}}$$

Analiticamente $FG = \sqrt{(a^2 + c^2)}$

Sulla FG, presa per diametro, si costruisca il suo semicerchio corrispondente, e in esso dal punto F si applichi la corda $FH = FE$; quindi si uniscano i punti G, H colla retta GH. Pel triangolo rettangolo FHG sarà

$$GH = \sqrt{\{(FG)^2 - (FH)^2\}} = \sqrt{\{(FG)^2 - (FE)^2\}}$$

Analiticamente $GH = \sqrt{(a^2 + c^2 - b^2)}$

Si compisca ora il parallelogrammo FHGK, e si otterrà

$$FK = HG = \sqrt{(a^2 + c^2 - b^2)}$$

Sulla FH prendasi la retta $FI = FQ = \sqrt{(c^2 - a^2)}$; e sulla FK prolungata dal punto I s' abbassi IL perpendicolare a KI. Nel triangolo rettangolo LIK si avrà l' analogia (n.° 244 lib. 5.°)

$$FK : FI :: FI : FL$$

Quadrando. . . . . $(FK)^2 : (FI)^2 :: (FI)^2 : (FL)^2$

Analiticamente $a^2 + c^2 - b^2 : c^2 - a^2 :: c^2 - a^2 : (FL)^2 = \frac{(c^2 - a^2)^2}{a^2 + c^2 - b^2}$

Ora si prolunghi HF indefinitamente, e prendasi $FM = FL$. Dal punto M al punto K si guidi la retta MK, cui dal punto F si tiri la retta FN parallela. Nel triangolo rettangolo FKN (luogo citato) si avrà

$$FN = \sqrt{\{(FK)^2 + (KN)^2\}} = \sqrt{\{(FK)^2 + (MF)^2\}} = \sqrt{\{(FK)^2 + (FL)^2\}}$$

Analiticamente . . . $FN = \sqrt{\left\{a^2 + c^2 - b^2 + \frac{(c^2 - a^2)^2}{a^2 + c^2 - b^2}\right\}}$

Ora compiscasi il parallelogrammo FODP, e prolungata FE indefinitamente da ambedue le estremità prendasi da una parte $FS = 2FE = 2b$, e dall' altra si faccia $FR = FP = DO = d$. Presa tutta RS per diametro si descriva il

suo corrispondente semicerchio: quindi prolungata FP ad incontrarne la periferia nel punto T, si avrà (n.° 120 lib. 2.°)

$$(FT)^2 = RF \,.\, FS = 2bd$$

Si prolunghi FS in U, talchè sia FU = FG, e si congiungano i punti T, U colla retta TU. Sopra FU, presa per diametro, si descriva il corrispondente semicerchio, e si applichi in esso la corda FX = FT: quindi dal punto U al punto X si tiri la retta UX. Nel triangolo rettangolo FUT si avrà

$$(UT)^2 = (FU)^2 + (FT)^2 = (FG)^2 + (FT)^2$$

Analiticamente . . . $(UT)^2 = a^2 + c^2 + 2bd$

E nel triangolo pur rettangolo FUX si avrà sempre pel luogo citato

$$(UX)^2 = (UF)^2 - (FX)^2 = (FG)^2 - (FT)^2$$

Analiticamente . . . $(UX)^2 = a^2 + c^2 - 2bd$

Si prendano sul prolungamento della retta FN le rette FΦ = TU, ed FY = UX; e su quello della retta HM prendasi FΣ = FK. Dal punto Φ si tiri la retta ΦZ parallela alla retta NΣ, che si ottiene congiugnendo i punti determinati Σ, ed N. Si avrà $\frac{1}{2}$ FZ = x. Pe' triangoli simili infatti FZΦ, FNΣ si ha l'analogia

$$FN : F\Phi :: F\Sigma : FZ$$

Analiticamente $\sqrt{\left\{a^2+c^2-b^2+\frac{(c^2-a^2)^2}{a^2+c^2-b^2}\right\}} : \sqrt{\left(a^2+c^2+2bd\right)} :: \sqrt{\left(a^2+c^2-b^2\right)} : FZ$

Fatto il prodotto degli estremi, e diviso pel 1.° termine sarà

$$FZ = \sqrt{\left\{\frac{(a^2+c^2-b^2)(a^2+c^2+2bd)}{a^2+c^2-b^2+\frac{(c^2-a^2)^2}{a^2+c^2-b^2}}\right\}}$$

Ma si è trovato essere x rappresentato dalla metà di questo valore. Dunque sarà

$$\frac{1}{2} FZ = x$$

Tirata dal punto Y la retta YΔ parallela ad NΣ si proverebbe agevolmente essere $\frac{1}{2}$ FΔ l'altro valore della x, presa la radice negativa. Ritenuto soltanto il primo, facciasi sul lato ED del triangolo dato il suo se-

micerchio corrispondente, ed applicatavi dal punto D la corda $DB = \frac{1}{2} FZ = x$, sarà questa il lato del quadrato, di cui si cerca, onde condotta pel punto E la retta $BA = BD$, ed innalzata DC perpendicolare, ed uguale a BD, se si congiugneranno i punti A, C colla retta AC troverassi circoscritto al dato triangolo il chiesto quadrato ABCD. C. D. F.

Osservazione I.ª

Se il triangolo dato fosse isoscele, avendosi allora $c = a$, la formola si semplificherebbe d'assai, perchè si avrebbe

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{(2a^2-b^2)(2a^2 \pm 2bd)}{2a^2-b^2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(2a^2 \pm 2bd\right)} = \sqrt{\left(\frac{2a^2 \pm 2bd}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{a^2 \pm bd}{2}\right)}$$

Osservazione II.ª

Se fosse equilatero la formola diventa $x = \frac{a}{2}\sqrt{(2 \pm \sqrt{3})}$

Osservazione III.ª

Se fosse rettangolo in modo, che si avesse $b^2 = a^2 + c^2$, avverrebbe nella formola una confusione grandissima. Dovendo allora infatti coincidere i lati del triangolo con quelli del quadrato non sarebbe la circoscrizione del quadrato una vera circoscrizione, ma una confusione di linee.

Osservazione IV.ª

Se fosse rettangolo in modo, che si avesse $a^2 = b^2 + c^2$, la formola diverrebbe

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{2c^2(b^2 + 2c^2 \pm 2bd)}{2c^2 + \frac{b^4}{2c^2}}\right\}}$$

Osservazione V.ª

Se fosse rettangolo in modo, che si avesse $c^2 = a^2 + b^2$, sarebbe

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{2a^2(b^2 + 2a^2 \pm 2bd)}{2a^2 + \frac{b^4}{2a^2}}\right\}}$$

Osservazione VI.ª

Il problema è assurdo ogni volta, che fosse $b^2 > a^2 + c^2$, cioè ogni volta, che il quadrato del lato opposto al vertice del triangolo, che coincide coll'angolo del quadrato è maggiore della somma degli altri due quadrati.

Osservazione VII.ª

Il termine $\frac{(c^2-a^2)^2}{a^2+c^2-b^2}$ nel denominatore della formola è sempre positivo, tanto nel caso di $c > a$, quanto in quello di $c < a$

Osservazione VIII.ª

Quello poi, che ci sembra assai mirabile è, che essendo la formola trovata affatto indipendente dagli angoli, si avranno infiniti triangoli, i cui lati sotto la combinazione della formola istessa saranno tra loro paragonabili; giacchè tutte quelle formole, sebbene espresse per lati diversi, debbono sempre dare il lato del quadrato circoscritto.

Problema LXII.

Dato un quadrato circoscrivervi un esagono regolare. (Fig. 59.ª tav. 4.ª)

Soluzione

Sia dato il quadrato ABCD (Fig. 59.ª). Si vuole circoscrivere ad esso l'esagono regolare EFGLHI. Supponendo sciolto il problema si tirino le rette EL, FI. Per essere il lato dell'esagono regolare eguale al raggio del cerchio, nel quale è inscritto (n.° 192 lib. 4.°), il triangolo EFM sarà equilatero, e quindi la perpendicolare FO abbassata sulla base EM taglierà per mezzo la base istessa. Sarà dunque $EO = \frac{1}{2} EF$; e per lo stesso principio $EL = 2FE$.

Facciasi $AB = a$; $FE = x$. Sarà $EO = \frac{x}{2}$; ed $AN = \frac{a}{2}$

Nel triangolo rettangolo FOE si avrà (n.° 101 lib. 1.°)

$$FO = \sqrt{\{(FE)^2 - (EO)^2\}}$$

Analiticamente ... $FO = \sqrt{\left(x^2 - \frac{x^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{4x^2 - x^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{3x^2}{4}\right)} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

Ne' triangoli simili FEO, AEN si ha la proporzione (n.° 254 lib. 5.°)

$$FO : EO :: AN : NE$$

Analiticamente $\frac{x\sqrt{3}}{2} : \frac{x}{2} :: \frac{a}{2} : NE = \frac{\frac{x}{2} \times \frac{a}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{ax}{4}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{2ax}{4x\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

Ma si ha $EM = EF = EN + NM$. Dunque analiticamente sarà

$$x = \frac{a}{2\sqrt{3}} + \frac{a}{2} = \frac{a + a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

Costruzione

Si congiungano i punti D, B colla retta DB, ed alzata dal punto B la retta BP perpendicolare a DB, ed uguale a BA si uniscano i punti D, P colla retta DP. Avrassi (n.° 101 lib. 1.°)

$$(DP)^2 = (DB)^2 + (BP)^2 = (DA)^2 + (AB)^2 + (BP)^2 = 3(AB)^2$$

Analiticamente, presa la radice positiva sarà

$$DP = \sqrt{(3a^2)} = a\sqrt{3}$$

Prolungato il lato DC in Q, cosicchè sia DQ=DP, prendasi $DR = DV = \frac{a}{2}$, ed $RS = \frac{1}{2}DP$. Si congiungano quindi i punti S, Q colla retta SQ, e dal punto C si guidi la retta CT parallela a QS. Si avrà pe' triangoli simili DQS, DCT (luogo citato) la proporzione

$$DQ : DC :: DS : DT$$

Analiticamente ... $a\sqrt{3} : a :: \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} : DT$

per essere $DS = DR + RS = DV + \frac{1}{2}DQ = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Fatto il prodotto de' medj, e diviso pel 1.° termine si otterrà

$$DT = \frac{a\left(\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}{a\sqrt{3}} = \frac{a + a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = x$$

Prese pertanto le rette ME, ML eguali alla DT, dai punti E, ed L pei punti A, e D si tirino le rette FE, GL eguali a DT, e si congiun-

gano i punti F, G colla retta FG. Facendo lo stesso dall' altra parte si avrà circoscritto al dato quadrato un esagono regolare. C. D. F.

Problema LXIII.

In un dato quadrato inscrivere un ottagono regolare. (Fig. 60.ª tav. 4.ª)

Soluzione

Sia ABCD (Fig. 60.ª) il dato quadrato. Supposto già inscritto l'ottagono regolare, essendo l'angolo EFG = FGH, saranno eguali ancora i supplementi di questi angoli, e quindi BFG = BGF. Dunque si avrà (n.° 47 lib. 1.°) FB = BG. I quattro triangoli FBG, KHD, MCL, ANE saranno simili, ed avendo ancora un lato eguale, cioè FG = KH = ML = NE saranno eguali (n.° 69 lib. 1.°).

Ciò posto: facciasi EF $= x$; AB $= a$. Sarà pure FG $= x$

Nel triangolo rettangolo FGB si avrà (n.° 101 lib. 1.°)

$$(FG)^2 = (FB)^2 + (BG)^2 = 2(FB)^2$$

Donde si ricava . . . $(FB)^2 = \frac{1}{2}(FG)^2$

Analiticamente, presa la radice positiva . . . $FB = \sqrt{\left(\frac{x^2}{2}\right)}$

Ma si ha AB = AE + FE + FB = EF + 2FB. Dunque analiticamente sarà

$$a = x + 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)}$$

1.° Si sottragga x. 2.° Si quadri l'equazione. 3.° Si sottragga x^2. 4.° Si aggiunga $2ax$. 5.° Si ordini per x, e sarà

$$x^2 + 2ax = a^2$$

6.° Si compisca il quadrato. 7.° Si estragga la radice positiva. 8.° Si sottragga a, e sarà

$$x = -a + a\sqrt{2}$$

Costruzione

Conducasi la diagonale AD. Fatto centro in D, col' raggio DC descrivasi l' arco CO; quindi dal punto O, in cui quest' arco sega la

diagonale si conduca la retta OE perpendicolare ad AB. Presa da una parte, e dall' altra degli angoli del quadrato una retta eguale ad AE, e congiunte le rette NE, FG, KH, ML sarà EFGHKLMN l'ottagono regolare inscritto. Infatti, essendo AC $=a$, nel triangolo rettangolo ACD si avrà (luogo citato)

$$(AD)^2=(AC)^2+(CD)^2=2(AC)^2=2a^2$$

E presa la radice positiva . . . . . $AD=\sqrt{(2a^2)}=a\sqrt{2}$

Conseguentemente . . . . . $AO=AD-OD=a\sqrt{2}-a=x$

Inoltre per essere il triangolo AEO simile al triangolo BAD, esso triangolo AEO sarà isoscele, come lo è BAD. Dunque si avrà

$$2(AE)^2=(AO)^2$$

Donde, dividendo per 2, si avrà . . . $(AE)^2=\frac{1}{2}(AO)^2$

Analiticamente. . . . . $AE=\sqrt{\left(\frac{x^2}{2}\right)}$

E quindi sarà ancora . . . $BF=\sqrt{\left(\frac{x^2}{2}\right)}$, come si è trovato superiormente. C. D. F.

Osservazione I.ª

Avendo trovato essere $-a+a\sqrt{2}$ il lato dell' ottagono, sarà esso eguale alla differenza tra la diagonale, e il lato del quadrato, in cui è inscritto; epperò se sul lato dell' ottagono regolare inscritto in un quadrato formerassi un altro quadrato, questi avrà la somma della diagonale, e del lato eguale al lato del primo quadrato. (Vedi l' osservazione al problema 26.°)

Osservazione II.ª

Il lato dell' ottagono essendo $-a+a\sqrt{2}=a(-1+\sqrt{2})$, se si paragonerà con quello del quadrato si avrà

$$a : a(-1+\sqrt{2}) :: 1 : -1+\sqrt{2}$$

Moltiplic.° per $1+\sqrt{2}$ la 2.ª ragione $a:a(-1+\sqrt{2})::1+\sqrt{2}:(1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})$

Riducendo la 2.ª ragione. . . . . $a:a(-1+\sqrt{2})::1+\sqrt{2}:1$

Dunque starà il lato del quadrato al lato dell' ottagono regolare inscritto $::1+\sqrt{2}:1$

Per conoscere il rapporto tra la superficie del quadrato, e quella dell'ottagono bisognerà cominciare a conoscere la superficie del triangolo rettangolo isoscele FBG. Noi abbiamo trovato essere $BF = \sqrt{\left(\frac{x^2}{2}\right)}$. Sostituito ad x il suo valore, sarà

$$BF = \sqrt{\left\{\frac{a^2}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)^2\right\}} = \sqrt{\left\{\frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{2}\right\}} = a\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)}$$

Ma è (n.° 423 lib. 9.°) superficie $FBG = \frac{1}{2} FB \times BG = \frac{1}{2}(FB)^2$

Dunque analiticamente sarà superf. $FBG = \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right) = \frac{a^2}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)$

Dunque la somma dei quattro triangoli angolari sarà $a^2(3-2\sqrt{2})$; e quindi la superficie dell'ottagono, ch'è uguale a quella del quadrato, meno la detta somma, riescirà

$$a^2 - a^2(3-2\sqrt{2}) = a^2(1-3+2\sqrt{2}) = a^2(-2+2\sqrt{2})$$

E perciò il chiesto rapporto tra la superficie del quadrato, e quella dell'ottagono inscritto sarà

$$a^2 : a^2(-2+2\sqrt{2}), \text{ ossia } 1 : -2+2\sqrt{2}$$

Moltiplicando questo rapporto per $2+2\sqrt{2}$ si avrà invece

$$a^2 : a^2(-2+2\sqrt{2}) :: 2+2\sqrt{2} : (2+2\sqrt{2})(-2+2\sqrt{2}) :: 2+2\sqrt{2} : 8-4 :: 2+2\sqrt{2} : 4 :: 1+\sqrt{2} : 2$$

Dunque il rapporto ridotto della superficie del quadrato a quella dell'ottagono sarà $:: 1+\sqrt{2} : 2$

Paragonando i rapporti de' lati, e delle superficie si avrà la proporzione

$$1+\sqrt{2} : 1 :: 1+\sqrt{2} : 2$$

Cioè a dire il lato d'un quadrato sta al lato dell'ottagono regolare in esso inscritto in doppia ragione della superficie del 1.° a quella del 2.°

Problema LXIV.

Ad un dato triangolo equilatero circoscrivere un pentagono regolare. (Fig. 61.ª tav. 4.ª)

Soluzione

Supponendo sciolto il problema si abbassi la perpendicolare AL (Fig. 61.ª) nel triangolo dato BAC sino al concorso col lato del pen-

tagono, e tirata la retta DE dal punto F si guidi FH perpendicolare a DE

Sia $BC=a$; $AI=b$; $DF=x$. Pel problema 58.° si avrà

$$PL=\frac{5x\sqrt{2}}{2\sqrt{5(5-\sqrt{5})}};\ IL=\frac{x}{2}\sqrt{(5+2\sqrt{5})}-b;\ DH=DP-HP=\frac{1}{2}ED-\frac{1}{2}FG=\frac{x}{4}(-1+\sqrt{5})$$

Ora pei triangoli simili DFH, BFQ si avrà la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$FH : DH :: FQ : BQ$$

Ma $FH=PL$; $FQ=IL$. Dunque $PL : DH :: IL : BQ$

Analiticamente ... $\frac{5x\sqrt{2}}{2\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}} : \frac{x}{4}(-1+\sqrt{5}) :: \frac{x}{2}\sqrt{(5+2\sqrt{5})}-b : BQ$

Moltiplicando per 2 gli antecedenti si otterrà

$$\frac{5x\sqrt{2}}{\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}} : \frac{x}{4}(-1+\sqrt{5}) :: x\sqrt{(5+2\sqrt{5})}-2b : BQ$$

Moltiplicando per $4\sqrt{(5(5-\sqrt{5}))}$ la 1.ª ragione, e quindi dividendola per $2x$, si avrà

$$10\sqrt{2} : \sqrt{(10(5-2\sqrt{5}))} :: x\sqrt{(5+2\sqrt{5})}-2b : BQ$$

Fatto il prodotto de' medj, e diviso pel 1.° termine sarà

$$BQ=\frac{\{\sqrt{(10(5-2\sqrt{5}))}\}\{x\sqrt{(5+2\sqrt{5})}-2b\}}{10\sqrt{2}}=\frac{5x\sqrt{2}-2b\sqrt{(2.5(5-2\sqrt{5}))}}{10\sqrt{2}}$$

Ma si ha $2BQ+QO=2BQ+FG=BC$

Dunque analiticamente . . . $\frac{5x\sqrt{2}-2b\sqrt{(2.5(5-2\sqrt{5}))}}{5\sqrt{2}}+x=a$

Si moltiplichi per $5\sqrt{2}$ . . . $5x\sqrt{2}-2b\sqrt{(2.5(5-2\sqrt{5}))}+5x\sqrt{2}=5a\sqrt{2}$

Si divida per $\sqrt{2}$ . . . . . $5x-2b\sqrt{(5(5-2\sqrt{5}))}+5x=5a$

Sommando le x, aggiugnendo $2b\sqrt{(5(5-2\sqrt{5}))}$, e dividendo per 10 sarà

$$x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{5}b\sqrt{(5(5-2\sqrt{5}))}$$

Ma $b=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Dunque $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{10}\sqrt{\{3.5a(5a-2\sqrt{(5a^2)})\}}$

COSTRUZIONE

Presa $CK=6a$, e fatto su di essa il corrispondente suo semicerchio, s'alzi dal punto B la perpendicolare BM. Riuscirà $BM=\sqrt{(5a^2)}$. (Vedi sempre il problema 58.°). Sulla BK costruito il semicerchio, e presa la retta $BO=2BM=2\sqrt{(5a^2)}$, s'alzi dal punto O la perpendicolare ON. Si congiunga il punto N col punto K per mezzo della retta NK. Sarà (n.° 245 lib. 5.°)

$$(NK)^2=BK\,.\,KO=BK(BK-OB)=5a\left(5a-2\sqrt{(5a^2)}\right)$$

Dal punto N si alzi NR perpendicolare, ed uguale a NK; quindi si tiri la retta RK; poi si alzi dal punto R la retta RS perpendicolare a KR, ed uguale ad RN. Si congiungano i punti K, S colla retta KS. Sarà evidentemente

$$KS=\sqrt{\left(3(KN)^2\right)}=\sqrt{\left\{3\,.\,5a\left(5a-2\sqrt{(5a^2)}\right)\right\}}$$

onde presa $KT=\frac{1}{10}KS$ (n.° 246 lib. 5.°), e aggiuntavi per diritto $TU=\frac{a}{2}$, sarà $KU=\frac{a}{2}+\frac{1}{10}\sqrt{\left\{3\,.\,5a\left(5a-2\sqrt{(5a^2)}\right)\right\}}=x$

Sebbene il problema sia sciolto, e sia cognito il lato x del pentagono ricercato, non si sa però ancora come circoscrivere al triangolo questo pentagono. Per ottenere questa cognizione si rappresenti per b il lato del pentagono, essendo $AL=AI+IL$, posto b a luogo della x, si avrà

$$AL=b+\frac{b}{2}\sqrt{\left(5+2\sqrt{5}\right)}-b=\frac{b}{2}\sqrt{\left(5+2\sqrt{5}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(5b^2+2b\sqrt{(5b^2)}\right)}$$

Prendasi $BV=b$; $Bh=6b$. Costruito sulla Bh il suo corrispondente semicerchio s'alzi perpendicolarmente VX, riescirà $VX=\sqrt{(5b^2)}$, e $Vn=2VX$; si costruisca sulla Bn il suo corrispondente semicerchio, che segherà in p la perpendicolare VX. Avrassi (n.° 120 lib. 2.°)

$$Vn : Vp :: Vp : VB$$

1.° Facciasi il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si estragga la radice. 3.° Sostituiti i valori analitici sarà

$$Vp=\sqrt{\left\{2b\sqrt{(5b^2)}\right\}}$$

Essendo pertanto $Vq=VX=\sqrt{(5b^2)}$, tirata la retta qp, si avrà

$$qp=\sqrt{\left\{(Vq)^2+(Vp)^2\right\}}=\sqrt{\left\{5b^2+2b\sqrt{(5b^2)}\right\}}$$

Presa perciò sul prolungamento della retta AI la retta $AL = pm = \frac{TP}{2}$ sarà $AL = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{5b^2 + 2b\sqrt{(5b^2)}\right\}}$, quale debb' essere la perpendicolare del pentagono. Condotta quindi la retta FG parallela a BC, e prese dall' una e dall' altra parte del punto L le rette LF, LG eguali ad $\frac{1}{2}$ KU, si tirino dai punti G, F pei punti C, B le rette GE, FD eguali ambedue ad FG, e congiunte le rette DA, EA si avrà circoscritto al dato triangolo il pentagono regolare ricercato. C. D. F.

Problema LXV.

Dato un pentagono regolare circoscrivervi un esagono regolare. (Fig. 62.ª tav. 4.ª)

Soluzione

Sia dato il pentagono ABEFG (Fig. 62.ª), e vi si voglia circoscrivere l' esagono regolare ALCDHI. Supposto sciolto il problema si tirino le rette AD, BG, LI; e dal punto C si abbassi CO perpendicolare sopra AD

Sia $BN = a$; $LA = x$. Per la natura dell' esagono regolare è chiaro, che si avrà pure $LM = BN = a$; $AD = 2\,AL = 2x$; $AM = OD$; $LC = MO$

Ora nel triangolo rettangolo LAM si avrà (n.° 101 lib. 1.°)

$$(AM)^2 = (LA)^2 - (LM)^2$$

E presa la radice positiva $AM = \sqrt{\{(LA)^2 - (LM)^2\}}$

Analiticamente . . . . . $AM = \sqrt{(x^2 - a^2)}$

Ma $AM + MO + OD = 2AM + MO = 2AM + LC = AD$. Dunque analiticamente si avrà

$$2\sqrt{(x^2 - a^2)} + x = 2x$$

1.° Si sottragga x. 2.° Si quadri l' equazione, che n' emerge. 3.° Sottraggasi x^2, ed aggiungasi $4a^2$. 4.° Si divida per 3. 5.° Presa la radice positiva sarà

$$x = \sqrt{\left(\frac{4 \cdot 3 \cdot a^2}{9}\right)} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Costruzione

Presa NP = BN si uniscano i punti P, B colla retta PB, e da P alzata PQ perpendicolare a BP, ed uguale a PN si uniscano gli altri punti Q, B colla retta BQ, e riescirà (luogo citato)

$$(QB)^2 = (QP)^2 + (PB)^2 = (QP)^2 + (BN)^2 + (PN)^2$$

E per essere $QP = BN = PN = a$, resterà, presa la radice positiva

$$QB = \sqrt{(3a^2)} = a\sqrt{3}$$

Tagliata QB in tre parti eguali (n.° 246 lib. 5.°), prendasi BR eguale alla somma di due d' esse parti, e sarà $BR = \frac{2a\sqrt{3}}{3} = x$

Per descrivere poi l' esagono si alzi dal punto B l'indefinita BS perpendicolare a BN. Dal punto A sopra CS si addatti AL = BR; dal punto L si tiri LC parallela ad AD, ed uguale ad LA; dal punto C si guidi pel punto E la retta CD. Facendo lo stesso dall'altra parte sarà circoscritto al dato pentagono l' esagono regolare, di cui si cercava. C. D. F.

Problema LXVI.

In un dato esagono inscrivere un quadrato. (Fig. 63.ª tav. 4.ª)

Soluzione

Sia l' esagono regolare ABCDEF (Fig. 63.ª), e supposto in esso inscritto il quadrato GHKL si tirino le rette CE, PD, chiamato P il centro del cerchio circoscritto all' esagono. Poichè il lato dell' esagono è uguale al raggio del cerchio, cui è inscritto (n.° 192 lib. 4.°), il triangolo PCD sarà equilatero; e quindi la perpendicolare CN dividerà in due parti eguali la base PD. Dunque si avrà $ND = \frac{1}{2} CD$; e si avrà pure per la costruzione del problema, supposto sciolto, CE parallela a KH, e GH a PD. Facciasi $CD = a$; $CH = x$. Pe' triangoli simili CHM, CDN si avrà la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$CH : HM :: CD : DN$$

Analiticamente. . . . . $x : HM :: a : \frac{a}{2}$

Donde si otterrà . . . . . $HM = \frac{ax}{2a} = \frac{x}{2}$

Ma è $GH = GR + RM + MH = RM + 2\,MH$. Dunque sarà analiticamente

$$GH = a + x$$

Ma è pure $DO = DN - NO = DN - MH$. Dunque si avrà analiticamente

$$DO = \frac{a}{2} - \frac{x}{2} = \frac{a-x}{2}$$

Ora il triangolo rettangolo CND ci darà (n.° 101 lib. 1.°) l'equazione

$$CN = \sqrt{\{(CD)^2 - (DN)^2\}}$$

Analiticamente $CN = \sqrt{\left(a^2 - \frac{a^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{4a^2 - a^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{3a^2}{4}\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ed i triangoli simili ODH, DCN (luogo citato) daranno la proporzione

$$DO : HO :: DN : NC$$

Analiticamente . . . . . $\frac{a-x}{2} : HO :: \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Moltiplicando per 2 . . . . $a - x : 2HO :: a : a\sqrt{3}$

Ma $2HO = HK$. Dunque si avrà

$$HK = HG = \frac{(a-x)\,a\sqrt{3}}{a} = \frac{(a-x)\sqrt{(3a^2)}}{a}$$

Ma si è trovato superiormente $HG = a + x$. Dunque paragonando i due valori della GH si avrà l'equazione

$$\frac{(a-x)\sqrt{(3a^2)}}{a} = a + x$$

1.° Si moltiplichi per a. 2.° Si aggiunga $x\sqrt{(3a^2)}$. 3.° Si sottragga a^2. 4.° Si ordini per la x ridotta ad un solo fattore. 5.° Si divida per $a + \sqrt{(3a^2)}$, e si avrà

$$x = \frac{a\{\sqrt{(3a^2)} - a\}}{a + \sqrt{(3a^2)}}$$

E moltiplicando i termini della frazione per $\sqrt{(3a^2)} - a$, e riducendo sarà

$$x = \frac{a\left(\sqrt{(3a^2)} - a\right)^2}{2a^2} = \frac{\left(\sqrt{(3a^2)} - a\right)^2}{2a} = \frac{4a^2 - 2a\sqrt{(3a^2)}}{2a} = 2a - \sqrt{(3a^2)} = a(2 - \sqrt{3})$$

Costruzione

Per costruire questo valore si uniscano i punti F, D colla retta FD, la quale riuscirà uguale ad EC per la natura dell'esagono, ed uguale per

conseguenza a 2CN. Ma si è trovata superiormente $CN = \frac{1}{2}\sqrt{(3a^2)}$. Dunque sarà $FD = \sqrt{(3a^2)}$. Fatto centro in D, coll'intervallo DE preso per raggio, si descriva l'arco QE; e fatto centro in F, preso FE per raggio, descrivasi l'altro archetto SE. Riuscirà

$$QF = FD - DQ = FD - DE = \sqrt{(3a^2)} - a$$
$$SD = FD - FS = FD - FE = \sqrt{(3a^2)} - a$$

Ma abbiamo... $SQ = FD - QF - SD$. Dunque analiticamente sarà

$$QS = \sqrt{(3a^2)} - 2\left(\sqrt{(3a^2)} - a\right) = \sqrt{(3a^2)} - 2\sqrt{(3a^2)} + 2a = 2a - \sqrt{(3a^2)} = a(2 - \sqrt{3}) = x$$

Quindi col centro D, e coll'intervallo SD per raggio descritto l'archetto SK sarà

$$KE = ED - DK = QD - DS = QS = x$$

Finalmente se ritenuto il centro D, e coll'intervallo DK si determinerà il punto H, e col centro A, presa per raggio la retta $AL = DH$, si determineranno i punti L, G, condotte le rette HK, KL, HG, LG sarà GHKL il quadrato richiesto. C. D. T.

Problema LXVII.

In un esagono regolare inscrivere un pentagono regolare. (Fig. 64.ª tav. 4.ª)

Soluzione

Sia ABCDEF (Fig. 64.ª) l'esagono regolare dato, e suppongasi inscritto il pentagono regolare AGKLH, che si cerca. Si conducano le rette BF, GH. Per la natura di questi poligoni sarà $BF = GH$. Ma per essere AGKLH un pentagono regolare il suo lato AG è uguale alla parte maggiore di GH divisa in media, ed estrema ragione (Vedi problema 49.°). Dunque fatto $AG = x$, e $GH = BF = b$, si avrà

$$GH : AG :: AG : GH - AG$$

E analiticamente . . . . . $b : x :: x : b - x$

1.° Si faccia il prodotto degli estremi, e de' medj. 2.° Si aggiunga bx. 3.° Si compisca il quadrato. 4.° Si estragga la radice. 5.° Si sottragga $\frac{b}{2}$, e sarà

$$x = \frac{-b + b\sqrt{5}}{2} = b\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

COSTRUZIONE

Si tiri la retta AC, che riuscirà eguale a $BF = b$, e divisa per metà in O prendasi sopra CD la retta $CM = CO$; quindi si unisca il punto A col punto M. Nel triangolo rettangolo CAM si avrà (n.° 101 lib. 1.°)

$$(AM)^2 = (CA)^2 + (MC)^2$$

Analiticamente. . . . . $(AM)^2 = b^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{4b^2 + b^2}{4} = \frac{5b^2}{4}$

Presa la radice positiva $(AM) = \sqrt{\left(\frac{5b^2}{4}\right)} = \frac{b\sqrt{5}}{2}$

Segnata sopra AM la retta $MN = CM$, avrassi

$$NA = MA - MN = MA - CM = \frac{b\sqrt{5}}{2} - \frac{b}{2} = b\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = x$$

Col centro A, e coll'intervallo AN descritto l'arco GN, che taglia in G la retta BC, si uniscano i punti A, G colla retta AG. Col centro A, e coll'intervallo AG si determini il punto H, e si tiri la retta AH. Fatto centro finalmente in G, ed in H con un raggio eguale a $GA = AH$ si determinino i punti K, L, ed unite le rette GK, HL, KL resterà inscritto il pentagono regolare AGKLH nel dato esagono. C. D. F.

PLOBLEMI DIVERSI SUI SOLIDI E DI APPLICAZIONE AL CALCOLO TRIGONOMETRICO

PROBLEMA LXVIII.

Trovare un cilindro, ed un cono, che avendo la stessa altezza, e la stessa base, la superficie del cono sia eguale a quella del cilindro, escluse le basi. (Fig. 65.ª tav. 5.ª)

Soluzione

Vogliasi formare il cilindro ABCD (Fig. 65.ª n.° 1.°), ed un cono ECD tali, che avendo comune l'altezza, e la base, abbiano le superficie uguali, escluse le basi.

Sia $AD = a$; $DF = b$; $DE = x$. Sarà $DH = \frac{x}{2}$

Ciò posto: si avranno le seguenti espressioni (n.i 434, 435 lib. 9.°)

$$\text{Superf. cilindrica} = a \times \textit{circonf. } b$$

$$\text{Superf. conica} = \frac{x}{2} \times \textit{circonf. } b$$

Ma per condizione del problema queste superficie debbono essere uguali. Dunque, prescindendo dal moltiplicatore comune *circonf. b*, si avrà

$$\frac{x}{2} = a$$

E moltiplicando per 2 . . . . . $x = 2a$

Dunque nel triangolo rettangolo ADE l'ipotenusa DE debb'essere doppia del cateto AD. Tutto adunque si riduce a formare un triangolo rettangolo, in cui l'ipotenusa sia doppia di un cateto, per ottenere i due richiesti solidi.

Costruzione

Si costruisca un triangolo equilatero ADH (Fig. 65.ª n.° 2.°), di cui ogni angolo sarà di 60°. Quindi compiscasi l'angolo retto DAE, e si prolunghi DH ad incontrare la retta AE. Il triangolo DAE, che n'emerge, sarà il ricercato. Nel triangolo infatti AED abbiamo l'angolo $DAE = 90°$, l'angolo $ADE = 60°$, e l'angolo $AED = 30°$. Ma abbiamo pure l'angolo $EAH = 90° - 60° = 30°$. Dunque il triangolo EAH è isoscele. Dunque $AH = HE$. Dunque l'ipotenusa DE sarà doppia del lato del triangolo equilatero, ossia del cateto AD. Se pertanto si guidi EF parallela a DA, e DF parallela ad AE per compire il rettangolo EADF, supponendo, che EF stia ferma, e che intorno ad essa roti il rettangolo EADF, questo genererà il cilindro, e nella stessa rotazione il triangolo rettangolo DFE genererà il cono; ed il cilindro sarà eguale in superficie al cono, escluse le basi: e questi due solidi avranno base, ed altezza eguale. C. D. F.

Problema LXIX.

Dato un cono dividerlo per metà con un piano parallelo alla base. (Fig. 66.ª tav. 5.ª)

Soluzione

Sia dato il cono BAC (Fig. 66.ª), che si voglia dividere per metà con un piano HGK parallelo alla base. Suppongasi sciolto il problema. Sia $DC = a$; $DA = b$; $EG = y$; $AE = x$; e si avrà

$$FC = DC - DF = DC - EG = a - y \; ; \; ED = AD - AE = b - x$$

Si avrà pure la proporzione (n.° 446 lib. 9.°)

$$FC : FG :: EG : EA$$

Ma $DE = FG$. Dunque . . . $FC : DE :: EG : EA$

Analiticamente . . . . . $a - y : b - x :: y : x$.

1.° Si faccia il prodotto de' medj, e degli estremi. 2.° Si aggiunga xy ad ambedue i membri. 3.° Si divida per b, e sarà

$$y = \frac{ax}{b}$$

Supponendo φ il rapporto del diametro alla circonferenza, il cerchio di base sarà espresso da φa^2 (n.° 433 lib. 9.°), e la solidità del cono dato da $\frac{\varphi a^2 b}{3}$ (n.° 445 lib. 9.°). Similmente essendo $EG = \frac{ax}{b}$ il raggio del cerchio di base del cono richiesto, detto cerchio sarà $\frac{\varphi a^2 x^2}{b^2}$; onde $\frac{\varphi a^2 x^2}{b^2} \times \frac{x}{3} = \frac{\varphi a^2 x^3}{3b^2}$ sarà la solidità del cono cercato.

Ma per condizione del problema questa solidità debb'essere la metà di quella del cono dato. Dunque si avrà l'equazione

$$\frac{\varphi a^2 x^3}{3b^2} = \frac{\varphi a^2 b}{6}$$

4.° Si moltiplichi per $6b^2$. 5.° Si divida per $2\varphi a^2$. 6.° Si prenda la radice cubica, e sarà

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{b^3}{2}\right)} = \frac{b}{\sqrt[3]{2}} = \frac{b^2}{\sqrt[3]{(2b^3)}}$$

Osservazione

Benchè il problema sia sciolto, l'espressione $x = \frac{b^2}{\sqrt[3]{(2b^3)}}$ non si può costruire, perchè nessuno finora ha potuto trovare un cubo doppio di un altro, come infatti richiederebbesi per avere $\sqrt[3]{(2b^3)}$. Se fosse possibile il trovarlo, il valore della x si ridurrebbe ad una terza proporzionale.

Problema LXX.

Data la solidità di un tronco di cono, dato il raggio del cerchio di base, e data l'altezza del tronco, trovare il raggio del cerchio superiore. (Fig. 67.ª tav. 5.ª)

Soluzione

Sia data la solidità del tronco di cono ADCB (Fig. 67.ª n.° 1.°) eguale ad un cubo M (Fig. 67.ª n.° 2.°), che ha per lato A'B'. Dato il raggio FB della base, e data l'altezza FG del tronco, trattasi di trovare GC raggio del cerchio superiore. Sia a^3 la data solidità, onde abbiasi $A'B' = a$. Si faccia $FB = b$; $FG = d$; $GC = x$. Supposto compito il cono AEB si avrà la proporzione (n.° 446 lib. 9.°)

$$HB : HC :: GC : GE$$

Ma $HC = FG$. Dunque. . . . $HB : FG :: GC : GE$

Analiticamente . . . . . $b - x : d :: x : GE = \frac{dx}{b-x}$

L'altezza GF del tronco più la retta GE formano l'altezza di tutto il cono. Dunque l'espressione analitica di quest'altezza sarà

$$d + \frac{dx}{b-x} = \frac{db - dx + dx}{b-x} = \frac{db}{b-x}$$

Essendo b il raggio del cercio di base, preso φ pel rapporto del diametro alla circonferenza, l'area del cerchio sarà φb^2 (n.° 433 lib. 9.°). Ma la solidità del cono è uguale al terzo della base moltiplicata nell'altezza (n.° 446 lib. 9.°). Dunque la solidità del nostro cono sarà

$$\frac{\varphi b^2}{3} \times \frac{db}{b-x} = \frac{\varphi d b^3}{3(b-x)}$$

La solidità del picciol cono EDC è anch'essa il prodotto della base φx^2 nel terzo dell'altezza EG, ossia in $\frac{dx}{3(b-x)}$. Sarà dunque $\frac{\varphi dx^3}{3(b-x)}$ Sottratta la solidità di questo cono a quella del cono totale si avrà la solidità del tronco, e questa sarà eguale alla quantità data a^3. Si potrà pertanto instituire l'equazione

$$\frac{\varphi db^3 - \varphi dx^3}{3(b-x)} = a^3$$

1.° Si moltiplichi per $3(b-x)$. 2.° Si divida per φd, e sarà

$$b^3 - x^3 = \frac{3a^3}{\varphi d}(b-x)$$

Questa equazione può agevolmente essere ridotta al secondo grado, esprimendola pei fattori, donde emerge la quantità $b^3 - x^3$; e si avrà

$$(b-x)(b^2 + bx + x^2) = \frac{3a^3}{\varphi d}(b-x)$$

3.° Si divida per $b-x$. 4.° Si sottragga b^2. 5.° Si compisca il quadrato del 1.° membro. 6.° Si estragga la radice. 7.° Si sottragga $\frac{b}{2}$, e sarà

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12a^3 - 3\varphi db^2}{4\varphi d}\right)}$$

Da questa formola, ch'è tutta cognita, si ha cognito il raggio del cerchio superiore, di cui si cercava. C. D. F.

Problema LXXI.

Dato un esagono regolare, e sopra di esso eretta una piramide avente per altezza il lato istesso del poligono di base, trovare una sfera, la cui superficie equivalga a quella piramide, ed un'altra sfera equivalente in solidità alla solidità della piramide istessa. (Fig. 68.ª tav. 5.ª)

Soluzione

Sia BACDEF (Fig. 68.ª) l'esagono di base. Sarà (n.° 423 lib. 9.°) la superficie della piramide eguale alla superficie del poligono di base, più le superficie dei triangoli costituenti le facce della piramide istessa. Ora la superficie dell'esagono (essendo a il suo lato eguale al raggio del cerchio circoscritto) sarà $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ (Vedi le formole annesse al proble-

ma 50.°). Il lato poi de' triangoli elevati è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, che ha per cateti due lati eguali ad a, cioè il raggio fatto eguale ad a, e l'altezza della piramide eguale al lato del poligono di base, ch'è pur a. Dunque questo lato dei triangoli elevati sarà $\sqrt{(2a^2)}$, ossia $a\sqrt{2}$. Abbassata quindi nel triangolo AOB, ch'è uno de' costituenti le facce della piramide, la sua perpendicolare OP, questa taglierà per mezzo il lato AB, e si avrà (n.° 101 lib. 1.°)

$$(OP)^2=(OA)^2-(AP)^2$$

Presa la radice positiva . . . $OP=\sqrt{\{(AO)^2-(AP)^2\}}$

Analiticamente. . . . . $OP=\sqrt{\left(2a^2-\frac{a^2}{4}\right)}=\sqrt{\left(\frac{8a^2-a^2}{4}\right)}=\sqrt{\left(\frac{7a^2}{4}\right)}=\frac{a\sqrt{7}}{2}$

Moltiplicata questa perpendicolare per PA, ossia per $\frac{a}{2}$ si avrà la superficie di tutto il triangolo AOB, la quale sarà

$$\frac{a\sqrt{7}}{2}\times\frac{a}{2}=\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$$

Prendendo sei volte questa espressione sarà $\frac{6a^2\sqrt{7}}{4}$, ossia $\frac{3a^2\sqrt{7}}{2}$ la somma delle superficie di tutti i triangoli elevati, ossia delle facce della piramide, che unita colla superficie del poligono di base $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ darà la superficie totale della piramide, espressa conseguentemente dalla formola

$$\frac{3a^2\sqrt{7}}{2}+\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3a^2}{2}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$$

Chiamando ora x il raggio della sfera, la cui superficie debb' essere uguale alla trovata superficie della piramide, e notato con φ il rapporto del diametro alla circonferenza, la superficie d'uno de' cerchi massimi della sfera sarà φx^2 (n.° 433 lib. 9.°), e la totale $4\varphi x^2$ (n.° 405 lib. 8.°). Paragonando pertanto le due superficie, che debbono essere uguali, avrassi l'equazione

$$4\varphi x^2=\frac{3a^2}{2}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$$

Dividendo per 4φ, e prendendo poscia la radice positiva, sarà

$$x=\frac{a}{2\sqrt{\varphi}}\sqrt{\left(\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\times\frac{3}{2}\right)}$$

Dunque se con un raggio, il quale abbia il qui trovato valore per x descrivasi un cerchio, e per la rotazione di questo si ottenga una sfera, la superficie della sfera equivalerà a quella della piramide proposta.

Per aver poscia una sfera in solidità eguale alla solidità della stessa piramide, essendo la solidità della piramide (n.° 443 lib. 9.°) eguale al prodotto della sua base in un terzo dell'altezza, ed avendosi a per altezza, e $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ per base, sarà

$$\frac{a}{3} \times \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

e quindi $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ esprimerà la solidità della piramide.

Fatto y il raggio della nuova sfera, φ il rapporto del diametro alla circonferenza, siccome la solidità della sfera eguaglia quella di un cono avente per base la superficie della sfera, e per altezza il suo raggio (n.° 409 lib. 8.°), e la solidità di questo cono si ottiene d'altronde moltiplicando la base pel terzo dell'altezza (n.° 445 lib. 9.°); così per essere $4\varphi y^2$ la superficie della sfera, la sua solidità sarà

$$4\varphi y^2 \times \frac{y}{3} = \frac{4\varphi y^3}{3}$$

Ma le solidità della sfera, e della piramide debbono essere uguali. Dunque si avrà l'equazione

$$\frac{4\varphi y^3}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

Dividendo per $\frac{4\varphi}{3}$, e prendendo la radice cubica, si avrà

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{3a^3\sqrt{3}}{8\varphi}\right)} = \frac{a}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{3\sqrt{3}}{\varphi}\right)}$$

Se adunque con un raggio, che abbia questo valore si descriva un cerchio, rotando il quale si generi una sfera, questa eguaglierà in solidità la solidità della proposta piramide. C. D. T.

Problema LXXII.

Si vuol convertire una palla in una tazza emisferica di una data grossezza. Si domanda quale dovrà essere il diametro della superficie interna della tazza. (Fig. 69.ª tav. 5.ª)

Soluzione

Sia $1 : p$ la ragione del diametro alla circonferenza del cerchio, e chiamisi d il diametro della data palla, g la grossezza, che deve avere la tazza, ed x il diametro della superficie interna della tazza. Quello della superficie esterna sarà evidentemente $x + 2g$ (Fig. 69.ª n.° 1.°). Ora (n.i 433, e 447 lib. 9.°) la solidità della palla sarà $\frac{pd^3}{6}$, quella dell'emisfero col diametro x sarà $\frac{px^3}{12}$, e quella dell' emisfero, che ha $x + 2g$ per diametro, sarà $\frac{p}{12}(x+2g)^3$. Ma la differenza di questi due emisferi dà la solidità della tazza, la quale per condizione del problema debb' essere uguale alla solidità della palla. Dunque si avrà l' equazione

$$\frac{p}{12}(x+2g)^3 - \frac{px^3}{12} = \frac{pd^3}{6}$$

1.° Si moltiplichi per 12. 2.° Si divida per p. 3.° Si faccia attualmente la terza potenza accennata. 4.° Si divida per 2. 5.° Ridotti i termini semplificabili si sottragga $4g^3$. 6.° Si divida per $3g$, e si avrà

$$x^2 + 2gx = \frac{d^3 - 4g^3}{3g}$$

7.° Si compisca il quadrato. 8.° Si estragga la radice. 9.° Si sottragga g, e si otterrà

$$x = -g \pm \sqrt{\left(\frac{d^3 - g^3}{3g}\right)} \qquad (A)$$

Dunque il diametro della superficie interna della tazza, che si cerca, verrà rappresentato dalla formola (A), preso il segno superiore.

Costruzione

Per ottenere una costruzione, che riesca bella, e semplicissima, bisogna ridurre il valore della x ad una formola più facile a costruirsi; il che si fa colle seguenti operazioni.

1.° S' incominci a decomporre nella formola (A) la quantità $d^3 - g^3$, e si avrà

$$x = -g \pm \sqrt{\left(\frac{(d-g)(d^2 + dg + g^2)}{3g}\right)}$$

2.° Si moltiplichi, e si divida per $3g$ la quantità sotto il radicale. 3.° Si

cavi dal radicale il denominatore $9g^2$, ch' è un quadrato perfetto. 4.° Si decomponga l' ultimo fattore sotto il radicale istesso, e sarà finalmente

$$x = -g \pm \frac{1}{3g}\left\{\sqrt{\left(3g(d-g)\right)}\right\}\left\{\sqrt{\left(d(d+g)+g^2\right)}\right\}$$

Ora sopra una retta indefinita AZ (Fig. 69.ª n.° 2.°) prendasi $AC = d$, da cui si tolga $BC = g$, onde si abbia $AB = AC - BC = d - g$. Ad AB si aggiunga per diritto $BD = 3g$, e sopra AD, presa per diametro, si descriva il corrispondente suo semicerchio. Alzata dal punto B la retta BE perpendicolare ad AD sarà (n.° 120 lib. 2.°)

$$(BE)^2 = AB \,.\, BD$$

Presa la radice . . . . . $BE = \pm\sqrt{(AB \,.\, BD)}$

Analiticamente . . . . . $BE = \pm\sqrt{\left(3g(d-g)\right)}$

Alla retta AC si aggiunga per diritto la retta $CN = d + g$, e sulla AN formato il suo semicerchio, si alzi dal punto C alla periferia la normale CF. Sarà pure (luogo citato)

$$(CF)^2 = AC \,.\, CN$$

Presa la radice positiva . . . . $CF = \sqrt{(AC \,.\, CN)}$

Analiticamente . . . . . $CF = \pm\sqrt{\left(d(d+g)\right)}$

Congiungasi il punto F col B colla retta FB, che si prolunghi indeterminatamente. Si avrà (n.° 101 lib. 1.°)

$$(BF)^2 = (FC)^2 + (BC)^2$$

Analiticamente . . . . . $(BF)^2 = d(d+g) + g^2$

Presa la radice positiva . . . $BF = \sqrt{\left(d(d+g)+g^2\right)}$

Sopra la FB prolungata assunta una retta $BG = BE$ si faccia il corrispondente semicerchio, ritenuta FG per diametro, e da B si guidi alla periferia la retta BH perpendicolare al diametro; si avrà, come sopra

$$(BH)^2 = \left\{\sqrt{\left(d(d+g)+g^2\right)}\right\}\left\{\pm\sqrt{\left(3g(d-g)\right)}\right\}$$

Tirata pel punto H una parallela ad FG si prenda sopra di essa la retta $HI = 3g$, e dal punto B al punto I si guidi la retta BI: quindi si compisca l'angolo retto IBL (n.° 248 lib. 5.°); prolungata BL sino al con-

corso in L colla retta condotta parallela ad FG, si avrà la proporzione (n. 244 lib. 5.°)

$$IH : HB :: HB : HL$$

Fatto il prodotto de' medj, e diviso pel 1.° termine, ed alle linee sostituiti i valori analitici sarà

$$HL = \pm \frac{1}{3g} \left\{ \sqrt{\left(3g(d-g)\right)} \right\} \left\{ \sqrt{\left(d(d+g)+g^2\right)} \right\}$$

Tolta pertanto da HL la retta $HM = g$, sarà $ML = x$; onde il diametro cercato verrà rappresentato da questa linea.

Applicazione

Sia a cagion d'esempio il diametro della palla atomi 42, e la grossezza da darsi alla tazza sia atomi 6. Avrassi $d=42$; $g=6$. Dunque presa la prima espressione del diametro sarà

$$x = -6 \pm \sqrt{\left(\frac{74088-216}{18}\right)} = -6 \pm \sqrt{\left(\frac{73872}{18}\right)} = -6 \pm 64,063$$

E ritenuto il segno superiore $x = 58,063$. Dunque il diametro della superficie interna della tazza dovrà essere di atomi 58, e 63 millesimi di atomo.

Problema LXXIII.

Suppongasi, che ABED rappresenti una sfera generata dalla rotazione del semicerchio ABE intorno al diametro AE. Il settore ACB in questa rotazione genererà un settore sferico composto d'un segmento sferico generato dalla rotazione del semi-segmento APB, e d'un cono generato dalla rotazione del triangolo rettangolo BPC. Si domanda in qual luogo il segmento sferico, ed il cono saranno tra loro eguali.
(Fig. 70.ª tav. 5.ª)

Soluzione

La solidità del settore sferico (n.° 449 lib. 9.°) essendo eguale al prodotto della superficie della convessità del settore sferico nella terza parte del raggio, bisognerà primamente trovare questa superficie. Ora la superficie della convessità del settore sferico si trova moltiplicando il cerchio massimo ABED della sfera (Fig. 70.ª n.° 1.°), cui esso appartiene,

per l'altezza AP del segmento (n.° 439 lib. 9.°). Dunque se $r : c$ supporrassi il rapporto del raggio alla circonferenza, e si farà $AC = a$, $AP = x$, si otterrà la circonferenza del cerchio ABED da questa proporzione (n.° 434 lib. 9.°)

$$r : c :: a : circonf.\ ABED = \frac{ac}{r}$$

e la superficie del segmento sferico sarà $\frac{acx}{r}$; quindi la solidità del settore sarà

$$\frac{acx}{r} \times \frac{a}{3} = \frac{a^2cx}{3r}$$

Per avere la solidità del cono bisogna moltiplicare la superficie del cerchio, che gli serve di base, cioè la superficie del cerchio, che ha per raggio BP, pel terzo dell'altezza CP (n.° 445 lib. 9.°). Prima di eseguire questa moltiplica si osservi essere

$$CP = CA - AP = a - x$$

$$PB = \sqrt{\{(CB)^2 - (CP)^2\}} = \sqrt{(a^2 - a^2 + 2ax - x^2)} = \sqrt{(2ax - x^2)}$$

Ritenuti questi valori la superficie di un cerchio, che ha per raggio BP si otterrà dalla sua circonferenza moltiplicata nella metà di PB, la quale circonferenza si deduce dalla proporzione (luogo citato)

$$r : c :: \sqrt{(2ax - x^2)} : circonf.\ rich. = \frac{c}{r}\sqrt{(2ax - x^2)}$$

quindi la superficie del cerchio, base del cono, sarà

$$\left\{\frac{c}{r}\sqrt{(2ax - x^2)}\right\}\left\{\sqrt{\frac{(2ax - x^2)}{2}}\right\} = \frac{c}{2r}(2ax - x^2)$$

e la solidità del cono sarà rappresentata dalla quantità

$$\left(\frac{c}{2r}(2ax - x^2)\right)\left(\frac{a - x}{3}\right)$$

Ma perchè il cono sia eguale al segmento sferico bisogna, che il settore, il quale è la somma d'ambedue, sia doppio dell'uno, o dell'altro. Dunque si avrà l'equazione

$$\frac{ca^2x}{3r} = 2c\left\{\left(\frac{2ax - x^2}{2r}\right)\left(\frac{a - x}{3}\right)\right\}$$

Riducendo. . . . . $\frac{ca^2x}{3r} = c\left\{\left(\frac{2ax - x^2}{r}\right)\left(\frac{a - x}{3}\right)\right\}$

1.° Si moltiplichi per $3r$. 2.° Si divida per cx. 3.° Si eseguisca l'accennata moltiplica nel 2.° membro. 4.° Si riducano i termini semplificabili, e si ordini per x; si avrà

$$x^2 - 3ax = -a^2$$

5.° Si compisca il quadrato. 6.° Si estragga la radice. 7.° Si aggiunga $\frac{3a}{2}$, e sarà

$$x = \frac{3a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

Osservazione

Di questi due valori non vi ha, che $\frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$, il quale possa soddisfare al problema, poichè egli è evidente, che l'altro valendo più di $2a$, cioè più del diametro, non può darci una soluzione, che convenga alla sfera.

Costruzione

Prendasi (Fig. 70.ª n.° 2.°) $AM = \frac{3a}{2}$, e sopra AM per diametro si descriva il semicerchio AOM. Dal punto A conducasi nel semicerchio la corda $AO = a$, e dal punto O al punto M si guidi la retta MO. Fatto centro in M, e col raggio MO descritto l'arco OP, si avrà $MO = PM$, onde si potrà dire d'avere portata OM da O in P. Questo P così determinato è quello, che fissa l'altezza cercata. Si ha infatti (n.° 101. lib. 1.°)

$$(OM)^2, \text{ ossia } (PM)^2 = (AM)^2 - (AO)^2$$

Presa la radice positiva. . . . . $PM = \sqrt{\{(AM)^2 - (AO)^2\}}$

Analiticamente . . . . . $PM = \sqrt{\left(\frac{9a^2}{4} - a^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{5a^2}{4}\right)} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Ma $AP = AM - PM$. Dunque sarà analiticamente

$$AP = \frac{3a}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2} = x$$

Sarà dunque l'altezza AP tale, che il settore sferico generato dalla rotazione del minor segmento circolare APB eguaglierà il cono generato dalla rotazione del triangolo PBC. C. D. T.

Problema LXXIV.

Da un dato cilindro tolto un cilindro concentrico si cerca la superficie totale del solido residuo, data la larghezza dello spazio annellare residuo. (Fig. 71.ª tav. 5.ª)

Soluzione

Il dato cilindro sia ABDC (Fig. 71.ª n.° 1.°), e vi si levi il cilindro concentrico GHFE. Trattasi di trovare la superficie totale del solido residuo, nella supposizione, che sia cognita la larghezza FB dello spazio annellare rinchiuso dalle due circonferenze, e cognita l'altezza, e la circonferenza del maggior cilindro, per essere dato.

Sia l'altezza del cilindro once 12. La circonferenza AOB sia once 26. La larghezza FB once 2. Il raggio del cerchio, che ha la circonferenza AOB si otterrà dal rapporto di Archimede (n.° 434 lib. 9.°)

$$7 : 22 :: 2x : 26$$

Donde . . . . . $22 \,.\, 2x = 26 \,.\, 7$

E quindi . . . . . $x = \frac{26 \,.\, 7}{22 \,.\, 2} = \frac{182}{44} = 4,136363$

Se da questo raggio si toglierà la larghezza FB, il residuo darà il raggio della circonferenza della base del cilindro inscritto, e sarà $QF = 2,136363$. Trovato il raggio si avrà la circonferenza dalla proporzione

$$7 : 22 :: 4,272726 : \text{circonf. } ESF = 13,428567$$

E quindi (n.° 380 lib. 8.°)

Superf. cilind. $GHFE = 13,428567 \times 12 = 161,142804$ . . once quadrate

Superf. cilind. $ABDC = 26 \times 12 = 312$ . . . . . once quadrate

Colle solite operazioni trovate le superficie de' cerchi AOB, ESF si avrà

Superf. circol. $AOB = 53,772706$ . . . . . once quadrate

Superf. circol. $ESF = 14,344145$ . . . . . once quadrate

Quindi $53,772706 - 14,344145 = 39,428561$ once quadrate esprimeranno il valore dello spazio annellare residuo, che moltiplicato per 2, onde avere gli spazj annellari superiore, ed inferiore, daranno once quadrate 78,857132. Questa superficie unita alla superficie del cilindro esterno AOB, e del concentrico ESF si avrà la somma d'once quadrate 551,999936 esprimente la superficie totale del solido residuo. C. D. F.

Osservazione

Questo problema, che numericamente non può risolversi esattamente, ma solo per approssimazione, colla Geometria è suscettibile di una solu-

zione esatta. Sia proposto di trovare un cerchio eguale alla superficie totale di quel solido residuo. Bisognerà trovare un cerchio, il quale eguagli la somma delle superficie de' cilindri concentrici, ed alla doppia differenza sia pur uguale de' cerchi concentrici AOB, ESF.

Sia (Fig. 71.ª n.° 1.°) $AQ = a$; $EQ = b$; $AC = c$

Pel problema 52.° il raggio del cerchio eguale alla differenza dei cerchi concentrici sarà $\sqrt{(a^2 - b^2)}$, e il cerchio doppio del cerchio trovato avrà per raggio $\sqrt{\{2(a^2 - b^2)\}}$. Ma il raggio del cerchio eguale alla superficie d'un cilindro è media proporzionale tra la sua doppia altezza, ed il raggio della base (n.° 388 lib. 8.°). Dunque chiamati x, ed x' i raggi de' cerchi eguali alla superficie de' cilindri concentrici, si avrà

$$2AC : x :: x : AQ$$

$$2AC : x' :: x' : EQ$$

Analiticamente . . . . . $2c \,.\, a = x^2$; donde $x = \sqrt{(2ac)}$

$$2c \,.\, b = (x')^2 ; \text{ donde } x' = \sqrt{(2bc)}$$

Bisogna ora trovare un cerchio, che sia eguale alla somma de' cerchi, che hanno per raggio $\sqrt{\{2(a^2 - b^2)\}}$, $\sqrt{(2ac)}$, $\sqrt{(2bc)}$. Per brevità questi raggi si esprimano colle lettere m, n, p. Pel problema citato il cerchio eguale alla somma dei cerchi coi raggi m, n avrà per raggio $\sqrt{(m^2 + n^2)}$, ed il cerchio uguale alla somma de' cerchi coi raggi $\sqrt{(m^2 + n^2)}$, e p avrà per raggio $\sqrt{(m^2 + n^2 + p^2)}$. Sostituiti ad m, n, p i loro valori si avrà il raggio del cerchio eguale alla superficie totale del solido residuo espresso per le date a, b, c, e sarà

$$R = \sqrt{\left(2(a^2 - b^2) + 2ac + 2bc\right)} = \sqrt{\left(2(a^2 - b^2) + 2c(a + b)\right)}$$

Costruzione

Sopra un diametro $AC = 2c$ (Fig. 71.ª n.° 2.°) facciasi il corrispondente suo semicerchio, e presa $AD = a$, $DE = b$, dal punto E s'innalzi la normale BE: quindi colla BA si uniscano i punti A, e B. Avrassi (n.° 245 lib. 5.°)

$$(AB)^2 = AC \,.\, AE$$

Analiticamente . . . . . $(AB)^2 = 2c(a + b)$

Sulla retta AD, presa per diametro, si descriva il corrispondente suo semicerchio, e adattata in esso la retta $DF = DE$ si congiungano i punti

F, A colla retta FA. Si prolunghi poscia DF in G, talchè si abbia FG = FA, e dal punto G al punto A si tiri la retta GA. Pel triangolo rettangolo AFD si avrà (n.° 101 lib. 1.°)

$$(AF)^2 = (AD)^2 - (DF)^2$$

Analiticamente . . . . . $(AF)^2 = a^2 - b^2$

Per l' altro triangolo AFG, essendo $(AG)^2 = 2(AF)^2$, analiticamente sarà

$$(AG)^2 = 2(a^2 - b^2)$$

Ora dal punto A si alzi perpendicolarmente ad AG la retta AH eguale ad AB, e si congiungano i punti H, G colla retta HG. Si avrà (luogo citato)

$$(GH)^2 = (AG)^2 + (AH)^2 = (AG)^2 + (AB)^2$$

Presa la radice positiva $GH = \sqrt{\{(AG)^2 + (AB)^2\}}$

Analiticamente . . . . . $GH = \sqrt{\left(2(a^2 - b^2) + 2c(a + b)\right)} = R$

Conseguentemente se colla retta GH, come raggio, si descriverà un cerchio, sarà questo eguale alla superficie totale del solido residuo, ch' è differenza tra i due cilindri concentrici. Sostituendo poi nella formola trovata pel raggio R i valori numerici rappresentati dalle lettere a, b, c, e trovando la superficie di un cerchio, che abbia per raggio il valore risultante, si otterrà per la superficie totale del solido residuo lo stesso numero, che si è trovato di sopra. C. D. F.

Problema LXXV.

Dato un tronco di cono trovare la sua superficie convessa, la superficie totale, un cerchio, ed un quadrato equivalenti ciascheduno alla superficie totale. (Fig. 72ª tav. 5.ª)

Soluzione

Il dato tronco di cono sia BEFC (Fig. 72.ª). Essendo dato il tronco saranno dati i raggi delle basi superiore, ed inferiore. Sia a cagion d' esempio BD = 4 Metri, ed ER = 2 Metri. L'apotema EB ne sia 8. Alla metà dell' apotema si conduca un piano POH, parallelo alla base, segante il cono. La sezione sarà un cerchio, la cui circonferenza eguaglierà la semisomma delle circonferenze delle due basi del dato tronco

(n.° 399 lib. 8.°). Cercando queste circonferenze col rapporto d'Archimede si avrà (n.° 434 lib. 9.°)

$$7 : 22 :: 4 : \text{circonf. } ETF = 12,5714^{m}$$

$$7 : 22 :: 8 : \text{circonf. } BLC = 25,1428^{m}$$

Quindi circonf. $POH = \frac{12,5714 + 25,1428}{2} = \frac{37,7142}{2} = 18,8571^{m}$

Sarà perciò (n.° 399 lib. 8.°) la superficie convessa del dato tronco di cono

$$8^{m} \times 18,8571^{m} = 150,8568^{m.\ quad.}$$

Per avere la superficie totale bisognerà trovare le superficie dei cerchi di base ETF, BLC, e poscia sommarle colla superficie convessa or ora trovata. Si avrà pertanto (n.° 378 lib. 8.°)

$$\text{Superf. cerch. } ETF = 12,5714 \times \frac{2}{2} = 12,5714$$

$$\text{Superf. cerch. } BLC = 25,1428 \times \frac{4}{2} = 50,2856$$

$$+ \text{ Superf. convessa del dato tronco} \ldots = 150,8568$$

$$\text{Richiesta superficie totale Met. quad.} \ldots\ldots 213,7138$$

Ora per avere un cerchio equivalente in area alla trovata superficie, supposto x il raggio da determinarsi, se ne avrà la circonferenza dalla proporzione

$$7 : 22 :: 2x : \text{circonf. richiesta} = \frac{44x}{7}$$

E la superficie circolare sarà

$$\frac{44x}{7} \times \frac{x}{2} = \frac{44x^2}{14} = \frac{22x^2}{7}$$

Quindi per condizione del problema avrassi l'equazione

$$\frac{22x^2}{7} = 213,7138$$

1.° Si moltiplichi per 7. 2.° Si divida per 22. 3.° Si prenda la radice positiva, e sarà

$$x = \sqrt{(67,9998)} = 8,2462 \ldots\ldots \text{ prossimamente.}$$

Dunque il cerchio equivalente in superficie alla totale superficie del dato tronco dovrà avere per raggio met. 8,2462.

Similmente si trova il lato del quadrato, sopra cui descritto esso qua-

drato sia equivalente alla suddetta superficie. Chiamato x questo lato si avrà

$$x^2 = 213,7138$$

e conseguentemente . . . . . $x = 14,6188$

Osservazione

Non si è ommesso questo problema, sebbene facilissimo, per dare una norma di calcolo nei quesiti spettanti alle quantità superficiali.

Problema LXXVI.

Dato il diametro d'una sfera trovare un cubo, la cui superficie sia eguale a quella della sfera.

Soluzione

Si trovi primamente la circonferenza del cerchio massimo nella supposizione, che a cagion d'esempio abbia per diametro Met. 16, e si avrà (n.° 434 lib. 9.°)

$$7 : 22 :: 16 : \text{circonf. richiesta} = 50,2857$$

E quindi (n.° 401 lib. 8.°)

$$\text{superf. sferica} = 16 \times 50,2857 = 804,5712 \text{ Met. quad.}$$

Chiamisi ora x il lato, sopra il quale debba costruirsi il cubo richiesto, la superficie del cubo verrà espressa da $6x^2$, perchè x^2 è la superficie di un lato, e sei sono i lati, che compongono il cubo. Si avrà conseguentemente per condizione del problema

$$6x^2 = 804,5712$$

1.° Si divida per 6. 2.° Si prenda la radice positiva, e sarà

$$x = \sqrt{(134,0952)} = 11,5799 \ldots \text{ prossimamente.}$$

Dunque il lato sopra il quale dovrà descriversi il cubo equivalente in area alla superficie della sfera, che ha 16 Metri di diametro, dovrà essere di Metri 11,5799. C. D. T.

Problema LXXVII.

Dato il raggio d'una sfera costruire un cubo, la cui solidità eguagli quella della sfera.

Soluzione

Il raggio della sfera sia di Metri 8. Il diametro sarà di Metri 16; quindi (n.° 434 lib. 9.°), preso il rapporto di Mezio, la seguente proporzione darà la superficie d'uno de' suoi cerchi massimi

$$113 : 355 :: 16 : \text{circonf. richiesta} = \frac{355 \,.\, 16}{113}$$

La superficie della sfera sarà quindi (n.° 403 lib. 8.°) . . . $\frac{355 \,.\, 16 \,.\, 16}{113}$

E la sua solidità sarà (n.° 447 lib. 9.°) . . . . . $\frac{355 \,.\, 16 \,.\, 16 \,.\, 8}{113 \,.\, 3}$

Chiamato x il lato del cubo richiesto avrassi per condizione del problema l'equazione

$$x^3 = \frac{355 \,.\, 16 \,.\, 16 \,.\, 8}{113 \,.\, 3}$$

Presa la radice cubica . . . $x = \sqrt[3]{\left(\frac{355 \,.\, 16 \,.\, 16 \,.\, 8}{113 \,.\, 3}\right)}$

E calcolando coi logaritmi (n.° 185 cit. elem. d'Algebra)

$$\text{Log. } x = \frac{1}{3}\left(\text{Log. } 355 + 2 \text{ Log. } 16 + \text{Log. } 8 - (\text{Log. } 113 + \text{Log. } 3)\right)$$

Ma è Log. 355	2,5502283	
2 Log. 16	2,4082398	
Log. 8	0,9030899	
Somma de' termini positivi .	5,8615580	5,8615580
Log. 113	2,0530784	
Log. 3	0,4771212	
Somma de' termini negativi .	2,5301996	2,5301996
	Residuo .	3,3313584

Dunque Log. $x = \frac{1}{3}(3,3313584) = 1,1104528$

Ma il numero, che prossimamente corrisponde a questo logaritmo è 12,8959. Dunque $x = 12,8959$. Dunque se sopra una retta, che abbia per lunghezza Metri 12,8959, o Metri 12,896 si costruirà il suo cubo questi equivalerà in solidità con picciolissima differenza alla data sfera. C. D. F.

Osservazione

Si è qui posta questa soluzione per norma di calcolo delle solidità coll'applicazione de' logaritmi, che di tanto agevolano il risultamento delle operazioni aritmetiche.

Problema LXXVIII.

Data una torre se ne vuol conoscere l'altezza. (Fig. 73.ª tav. 5.ª)

Soluzione

Dall' estremità A (Fig. 73.ª) facciasi partire una retta, che formi angolo retto colla torre, e misuratane una porzione AE, sulla estremità E s'alzi il grafometro. Quindi fissata la visuale CD parallela ad AE si giri in modo il cannocchiale, che condotta un' altra visuale DB vada essa a fendere la cima della torre.

Suppongasi AE = CD = 124 Metri, e l'angolo BDC sia di 26°, 48'. Si avrà la proporzione (n.° 488. Trigonometria annessa agli stessi citati elementi)

R : CD :: Tang. 26°, 48' : BC

Ossia . . . . . R : 124 :: Tang. 26°, 48' : BC

Passando dai numeri ai Logaritmi

Log. BC = Log. 124 + Log. Tang. 26°, 48' − Log. R

Ma Log. 124	2, 0934217
Log. Tang. 26°, 48'	9, 7034086
Somma de' termini positivi . . .	11, 7968303
− Log. R	10, 0000000
Dunque Log. BC	1, 7968303

Ma a questo logaritmo corrisponde molto prossimamente il numero 62,637. Dunque sarà BC = 62, 637. Se a questa quantità aggiugnerassi l'altezza del grafometro DE = CA, ch' è di Metri 1, 50 ordinariamente, l'altezza cercata della torre sarà di Metri 63, 137.

Problema LXXIX.

Dati due punti A, e B posti al di là d'un fiume, cui non si possa giugnere pel gonfiamento delle acque, trovare la distanza, che passa fra loro. (Fig. 74.ª tav. 5.ª)

Soluzione

A tal fine prendasi sul terreno una base arbitraria, e sia questa DC (Fig. 74.ª), che si supporrà di Metri 100. Collocato il grafometro ne' punti E, ed F s'intendano condotte le visuali DA, DB, CA, CB, e misurati gli angoli, sappiasi a cagion d'esempio essere l'angolo ADB = 25°, 30'; e l' angolo BDC = 46°, 30'. L'angolo ADC sarà di 72°. Ottenuti pure col grafometro gli angoli DCA = 40°, 25'; ed ACB = 30°, 50', sarà l'angolo DCB di 71°, 15'.

Ciò posto: nel triangolo ADC si avrà l'analogia (n.° 489. Trigonometria)

DA : DC :: sen. C : sen. A

e sostituiti i valori cogniti, ed invece di sen. A ciò, che manca alla somma degli altri due angoli per formare i due retti del triangolo, sarà

DA : 100 :: sen. 40°, 25' : sen. 67°, 35'

Passando dai numeri ai Logaritmi si avrà

Log. DA = Log. 100 + Log. sen. 40°, 25' — Log. sen. 67°, 35'

Ma è	Log. 100	2,0000000
	Log. sen. 40°,25'	9,8118038
	Somma dei termini positivi	11,8118038
—	Log. sen. 67°, 35'	9,9658764
	Dunque Log. DA	1,8459274

Ma il numero, che prossimamente corrisponde a questo logaritmo è 70,133.

Dunque DA = 70,133

Nel triangolo DBC si avrà la proporzione (luogo citato)

DB : DC :: sen. C : sen. B

e sostituiti i valori cogniti, ed invece di sen. B ciò, che manca alla somma degli altri due angoli per formare i due retti del triangolo, sarà

DB : 100 :: sen. 71°, 15' : sen. 62°, 15'

Passando dai numeri ai Logaritmi si avrà

$$\text{Log. DB} = \text{Log. } 100 + \text{Log. sen. } 71^\circ, 15' - \text{Log. sen. } 62^\circ, 15'$$

Ma è Log. 100	2,0000000
Log. 71°, 15'	9,9763179
Somma dei termini positivi	11,9763179
— Log. sen. 62°, 15'	9,9469372
Dunque Log. DB	2,0293807

Ma il numero, che prossimamente corrisponde a questo logaritmo è 106,999, che per brevità di calcolo, e con picciolissima differenza può ritenersi 107. Dunque sarà DB = 107.

Ciò posto: osservando il triangolo DAB si vede, che in esso sono cogniti due lati, e l' angolo compreso, e perciò se ne potrà dedurre anche la cognizione del 3.° lato (n.° 494. Trigonometria). Sarà quindi rivolto il nostro problema a cercare gli altri due angoli. Di questi due angoli è cognita la somma, perchè è il supplemento dell' angolo dato: se dunque se ne potesse trovare la differenza, si avrebbe subito il valore di ciascuno di essi, sapendo le formole, che li rappresentano dal problema 9.° di 1.° grado de' citati elementi d' Algebra. Per ottenere questa differenza cominciamo ad instituire la seguente proporzione (n.° 490 Trigonometria)

$$BD + AD : BD - AD :: \text{Tang.} \left(\frac{DAB + DBA}{2}\right) : \text{Tang.} \left(\frac{DAB - DBA}{2}\right)$$

e sostituiti i valori cogniti sarà

$$177,133 : 36,867 :: \text{Tang. } 77^\circ, 15' : \text{Tang.} \left(\frac{DAB - DBA}{2}\right)$$

Passando dai numeri ai logaritmi si otterrà

$$\text{Log. Tang.} \left(\frac{DAB - DBA}{2}\right) = \text{Log. } 36,867 + \text{Log. Tang. } 77^\circ, 15' - \text{Log. } 177,133$$

Ma è Log. 36,867	1,5666378
Log. Tang. 77°, 15'	10,6453598
Somma de' termini positivi	12,2119976
— Log. 177,133.	2,2482995
Dunque Log. Tang. $\left(\frac{DAB - DBA}{2}\right)$	9,9636981

A questo logaritmo corrispondendo una tangente di 42°, 36', 30'' prossimamente, sarà la semi-differenza dei due angoli 42°, 36', 30'', che moltiplicata per 2 darà la differenza totale, onde si avrà

$$DAB + DBA = 154°,\ 30'\ ;\ DAB - DBA = 85°,\ 13'$$

Si sommino queste due equazioni, e quindi si divida per 2 l'equazione, che n' emerge; e sarà

$$DAB = 119°,\ 51'\ 30''$$

Si sottragga la 2.ª alla 1.ª, e quindi si divida per 2 l'equazione residua; e sarà

$$DBA = 34°,\ 38',\ 30''$$

Cogniti ora i tre angoli, ed i due lati nel triangolo DAB, per trovare il terzo si farà la seguente proporzione (luogo citato)

$$BA : AD :: \text{sen. } D : \text{sen. } B$$

Sostituiti i valori cogniti sarà

$$BA : 70,133 :: \text{sen. } 25°,\ 30' : \text{sen. } 34°,\ 38',\ 30''$$

Passando dai numeri ai logaritmi sarà

$$\text{Log. } BA = \text{Log. } 70,133 + \text{Log. sen. } 25°,\ 30' - \text{Log. sen. } 34°,\ 38',\ 30''$$

Ma è Log. 70,133	1,8459274
Log. sen. 25°, 30'.	9,6339844
Somma de' termini positivi . . .	11,4799118
— Log. sen. 34°, 38', 30''.	9,7546863
Dunque Log. BA . . .	1,7252255

Ma il numero, che corrisponde prossimamente a questo logaritmo è 53,116. Dunque la distanza dei punti A, e B, che si cercava, sarà prossimamente di Metri 53, palmi 1, diti 1, ed atomi 6.

Osservazione

Si è scelto questo problema, ch' esigeva frequente uso delle tavole logaritmiche per dare una norma di soluzione in tanti altri problemi di simile natura, ne' quali si desidera molta speditezza di conteggio.

Problema LXXX.

Conoscendo la lunghezza della linea BC, e gli angoli B, e C formati dalle rette BA, CA determinare l'altezza AD, alla quale queste due rette s'intersecano. (Fig. 75.ª tav. 5.ª)

Soluzione

Conosciuto l'angolo per gli elementi di Trigonometria si conoscerà pure il valor del seno, e della tangente, che vi corrisponde. Ciò premesso si chiami $BC = a$; $AD = y$. Nel triangolo rettangolo ACD (Fig. 75.ª n.° 1.°), detto r il raggio, ed m la tangente, avrassi la proporzione

$$CD : DA :: r : m$$

Ma $DA = y$. Dunque . . . . $CD : y :: r : m$

Donde . . . . . $CD = \frac{ry}{m}$

Parimenti chiamata n la tangente nel triangolo ABD, e ritenuto r il raggio, sarà

$$BD : AD :: r : n$$

Ossia . . . . . $BD : y :: r : n$

Donde . . . . . $BD = \frac{ry}{n}$

Ma $BD + CD = BC$. Dunque analiticamente si avrà

$$\frac{ry}{m} + \frac{ry}{n} = a$$

1.° Si moltiplichi per mn. 2.° Si sciolga la y ne' suoi fattori. 3.° Si divida per $rm + rn$, ossia per $r(m + n)$, e sarà

$$y = \frac{amn}{r(m + n)} \qquad (Q)$$

Questo valore esprimente l'altezza si può semplificare con un elegante, e facile artificio; onde prima di costruirlo sarà prezzo dell'opera il semplificarlo. Ciò si ottiene collo introdurre a luogo delle tangenti dei due angoli C, e B le loro cotangenti, che noi chiameremo p, e q. Per gli elementi di Trigonometria abbiamo, che sta la tangente al raggio, come il raggio alla cotangente (n.° 471). Dunque avremo nel nostro caso

$$m : r :: r : p \qquad (A)$$

$$n : r :: r : q \qquad (B)$$

Fatto in ambedue le proporzioni il prodotto degli estremi, e de' medj si otterrà

$$mp = r^2 \qquad (\varphi)$$

$$nq = r^2 \qquad (\varphi')$$

Dividendo (φ) per p, e (φ') per q si avrà

$$m = \frac{r^2}{p} \qquad (\lambda)$$

$$n = \frac{r^2}{q} \qquad (\lambda')$$

Moltiplicando fra loro queste due ultime equazioni sarà

$$mn = \frac{r^4}{pq}$$

Si moltiplichino (λ), ed (λ') per r, e si avrà

$$mr = \frac{r^3}{p} \; ; \; nr = \frac{r^3}{q}$$

Si sommino queste due equazioni, e si otterrà

$$mr + nr = \frac{r^3}{p} + \frac{r^3}{q}$$

Ossia . . . . . $r(m+n) = \frac{qr^3 + pr^3}{pq} = \frac{r^3}{pq}(p+q)$ (δ)

Si moltiplichino ora fra loro le due proporzioni (A), e (B). Sarà

$$mn : r^2 :: r^2 : pq$$

E fatto il prodotto degli estremi, e de' medj si avrà

$$r^4 = mnpq \qquad (\delta')$$

Sostituito il valore trovato (δ) nell' espressione dell' altezza (Q) sarà

$$y = \frac{amn}{\frac{r^3}{pq}(p+q)} = \frac{amnpq}{r^3(p+q)}$$

E sostituito il valore trovato in (δ') per $mnpq$ si otterrà finalmente

$$y = \frac{ar^4}{r^3(p+q)} = \frac{ar}{p+q}$$

Costruzione

Semplificato il valore della y facilmente si può costruirlo col cercare una quarta proporzionale dopo $p+q$, r, ed a. Tra le condizioni del problema si ha questa, che gli angoli B, e C sono noti. Prendansi

pertanto come semiretti (Fig. 75.ª n.° 2.°), e i loro opposti lati saranno eguali. Si assuma BC per diametro, e si descriva il cerchio ABCO. Dividasi la semicirconferenza BAC per metà nel punto A, e dagli estremi B, e C del diametro si conducano al punto A le rette BA, CA. Queste formeranno il triangolo BAC rettangolo (n.° 161 lib. 3.°), e gli angoli B, e C saranno semiretti. Ma lo sono pur quelli, che si considerano come dati in questo problema. Dunque i primi saranno eguali a questi secondi. Ma se sono eguali gli angoli, e quindi eguale l'inclinazione, e la direzione delle rette, da cui sono formati, è uguale ancora l'altezza, a cui s'intersecano. Dunque ad un' altezza eguale tanto nelle date, come in quelle, che si sono condotte per costruzione, avrassi la intersecazione. Dunque se si potrà dimostrare, che l'altezza del triangolo formato sul diametro ha il valore trovato per y, si potrà conchiudere d'aver conosciuta l'altezza, a cui le due date rette s'intersecano.

Si abbassi a tale intento dal punto A sul diametro la perpendicolare AD. Dico, che si avrà $AD = \frac{ar}{p+q} = y$. Conducansi ai punti B, C, A le tangenti EB, EA, HA, HC, ed i rettangoli DH, DE avranno tutti i lati fra loro eguali (n.° 167 lib. 3.°). Ora dai triangoli simili AHC, BDA si ha la proporzione (n.° 234 lib. 5.°)

$$AH : HC :: BD : DA$$

Ma $HC = AD = BE$. Dunque $AH : BE :: BD : DA$

Componendo . . . . $AH + BE : BE :: BD + DA : DA$

Ma $BE = EA$; $DA = DC$. Dunque si avrà pure

$$AH + EA : BE :: BD + DC : DA \qquad (N)$$

Ma AH, ed EA sono le tangenti degli angoli di complemento. Dunque (n.° 461. Trigonometria) saranno le cotangenti degli angoli ABC, ACB, e quindi si avrà $AH = p$; $EA = q$. Ma si ha inoltre $EA = AD = r$, e $BD + DC = BC = a$. Dunque sostituiti i valori analitici nella proporzione (N) si avrà

$$p + q : r :: a : DA = \frac{ar}{p+q} = y$$

Dunque sarà cognita l'altezza, cui le due rette date AB, AC s'intersecano. C. D. T.

FINE DELLA RACCOLTA DE' PROBLEMI DI GEOMETRIA ANALITICA

INDICE DEI PROBLEMI

CONTENUTI IN QUESTO SECONDO TOMO

GEOMETRIA ANALITICA

PROBLEMI DI PRIMO GRADO

I. *Si vuol collocare uno specchio sul pavimento d'una stanza in modo, che un osservatore posto in un determinato punto, traguardando per esso, possa vedere una medaglia appesa alla verticale parete della stanza istessa.* (*Fig.* 1.ª *tav.* 1.ª) . . . . . pag. 1

II. *Dato un triangolo, ed un punto sopra uno de' suoi lati, trasformarlo in un altro triangolo avente il vertice in esso punto, e la base collocata sulla base prima prolungata all' uopo.* (*Fig.* 2.ª *tav.* 1.ª) . . . . . » 2

III. *Dati due punti sulla base di un triangolo determinarne altri due sugli altri lati in modo, che congiunti coi dati n' emerga un parallelogrammo.* (*Fig.* 3.ª *tav.* 1.ª) . . . . . » 3

IV. *Data una retta segata in un punto qualunque prolungarla in modo, che il rettangolo composto dalla data retta più la parte aggiunta in essa parte aggiunta sia eguale al quadrato della retta composta dal segmento della data preso verso la parte aggiunta, e da questa parte aggiunta.* (*Fig.* 4.ª *tav.* 1.ª) . . . . . » 4

V. *Da un punto dato fuori di due parallele condurre una secante tale, che la parte intercetta tra le medesime sia eguale ad una data retta, la quale però sia maggiore della retta, che misura la distanza delle parallele istesse.* (*Fig.* 5.ª *tav.* 1.ª) . . . . . » 5

VI. *Trovar un punto sul lato di un triangolo qualunque, da cui condotta una parallela alla base sia questa eguale alla*

retta intercetta tra il punto chiesto, e l'estremità del lato verso la base. (*Fig.* 6.ª *tav.* 1.ª) . . . . . pag. 6

VII. *In un dato triangolo inscrivere un quadrato tale, che uno de' suoi lati poggi sulla base del triangolo.* (*Fig.* 7.ª *tav.* 1.ª)» 7

VIII. *Dati due cerchi, e la distanza de' loro centri condurre una retta, che riesca tangente ad ambedue.* (*Fig.* 8.ª *tav.* 1.ª) » 8

IX. *Dato un angolo, e un punto entro di esso condurre da questo punto una linea retta chiudente spazio, e tale, che ivi resti divisa in parti proporzionali a due rette date.* (*Fig.* 9.ª *tav.* 1.ª) . . . . . » 9

X. *Dal centro di un cerchio qualunque condotto un raggio prolungato oltre la periferia per una determinata distanza, ed all' estremo di esso raggio così prolungato eretta una perpendicolare, cercasi in questa un punto tale, da cui condotta al centro una secante, la porzione della perpendicolare segnata dal chiesto punto riesca uguale alla porzione della secante istessa esteriore al cerchio.* (*Fig.* 10.ª *tav.* 1.ª) . . . . . » 10

XI. *Conoscendo l'altezza di due oggetti posti al disopra dello stesso piano, e la loro distanza parallela al piano, trovare su questa un punto, che sia equedistante dai due oggetti.* (*Fig.* 11.ª *tav.* 1.ª) . . . . . » 11

XII. *Dato un cerchio descriverne esternamente due altri, i quali si tocchino fra loro, sieno tangenti al dato cerchio, e talmente posti, che unendo con tre rette i loro centri si formi un triangolo simile a un dato.* (*Fig.* 12.ª *tav.* 1.ª) » 13

XIII. *Dato un cerchio inscrivervi tre altri cerchi eguali fra loro, fra loro tangenti, e tangenti al dato.* (*Fig.* 13.ª *tav.* 1.ª) » 15

XIV. *Dato il perimetro, ed i tre angoli di un triangolo costruire esso triangolo.* (*Fig.* 14.ª *tav.* 1.ª) . . . . . » 17

XV. *In un triangolo qualunque trovare un punto, dal quale condotte tre rette ai tre vertici, resti il triangolo diviso in tre parti eguali.* (*Fig.* 15.ª *tav.* 1.ª) . . . . . » 18

XVI. *Inscrivere in un dato cerchio due altri cerchi, che tra loro si tocchino, e tocchino il cerchio dato per modo, che uniti i tre centri abbiasi un triangolo simile a un dato.* (*Fig.* 16.ª *tav.* 2.ª) . . . . . » 20

XVII. *Dato un triangolo trovare il valore della perpendicolare condotta da un angolo sul lato opposto.* (*Fig.* 17.ª *tav.* 2.ª) » 23
XVIII. *Dato un cateto di un triangolo rettangolo, trovare l'ipotenusa, e l'altro cateto, i cui quadrati siano fra loro* :: 3 : 2. (*Fig.* 18.ª *tav.* 2.ª) . . . . . » 24
XIX. *Dato un triangolo dividerlo per metà con una retta perpendicolare sopra uno dei lati.* (*Fig.* 19.ª *tav.* 2.ª) . . . . . » 25
XX. *Data di posizione una retta, e due punti fuori di essa descrivere un cerchio, che passi per questi punti, e sia tangente alla data retta.* (*Fig.* 20.ª *tav.* 2.ª). . . . . » 27
XXI. *Trasformare un triangolo equilatero in un quadrato.* (*Fig.* 21.ª *tav.* 2.ª) . . . . . » ivi
XXII. *Data una retta costruire sopra di essa un triangolo isoscele, che abbia gli angoli alla base doppj ciascuno dell'angolo al vertice.* (*Fig.* 22.ª *tav.* 2.ª) . . . . . » 29
XXIII. *Dato un cerchio, ed un punto esterno, la cui distanza dal cerchio sia minore del diametro, cercasi di condurre da esso punto nel cerchio una secante tale, che la parte interna sia eguale alla tangente condotta dal punto dato al cerchio.* (*Fig.* 23.ª *tav.* 2.ª) . . . . . » 30
XXIV. *Sulla perpendicolare abbassata dal vertice di un triangolo qualunque sopra la base, trovare un punto, pel quale condotta una retta parallela alla base istessa, rimanga il triangolo diviso per metà.* (*Fig.* 24.ª *tav.* 2.ª). . . . . » 32
XXV. *Data una retta trovare sulla sua direzione un punto tale, che la sua distanza da un estremo sia media proporzionale tra la data retta, ed il segmento determinato dalla distanza, che passa tra esso punto, e l'altro estremo della retta data.* (*Fig.* 25.ª *tav.* 2.ª) . . . . . » 34
XXVI. *Data una retta eguale alla somma del lato d'un quadrato, e della sua diagonale, trovare il quadrato.* (*Fig.* 26.ª *tav.* 2.ª)» 35
XXVII. *Data una retta, ed un punto in un cerchio far passare per esso una corda eguale alla data retta.* (*Fig.* 27.ª *tav.* 2.ª)» 36
XXVIII. *Date tre rette, di cui una sia sempre minore della somma delle altre due, costruirne un triangolo.* (*Fig.* 28.ª *tav.* 2.ª)» 38

XXIX. *Sopra una data retta, come sopra ipotenusa, costruire un triangolo rettangolo tale, che, prolungato un cateto in modo, che il suo prolungamento sia eguale alla data ipotenusa, si abbia il quadrato di tutta questa retta contenente il cateto, ed il suo prolungamento, che stia al quadrato dell'altro cateto nella ragione di due rette date.* (*Fig.* 29.ª *tav.* 2.ª) . . . . . » 40

XXX. *Costruire un triangolo equilatero, la cui area sia eguale ad un dato quadrato.* (*Fig.* 30.ª *tav.* 2.ª) . . . . . » 42

XXXI. *Data la retta indefinita NZ, e dati in essa tre punti N, A, K, se ne cerca un punto M tale, che sia MN terza proporzionale dopo NK, ed AM.* (*Fig.* 31.ª *tav.* 2.ª) » 44

XXXII. *In un triangolo qualunque trovare un punto, dal quale condotte due parallele ai lati adjacenti, ed una retta al vertice, rimanga esso triangolo diviso in tre parti eguali; cioè in due trapezj, ed in un piccolo triangolo simile al dato.* (*Fig.* 32.ª *tav.* 2.ª) . . . . . » 46

XXXIII. *Trovare la superficie di un triangolo espressa per i tre suoi lati.* (*Fig.* 33.ª *tav.* 2.ª) . . . . . » 48

XXXIV. *Data la corda di un arco trovar la corda della sua metà.* (*Fig.* 34.ª *tav.* 2.ª) . . . . . » 50

XXXV. *Trovare una serie di cerchi, i quali stiano fra loro come la serie de' seguenti rapporti per la maggior parte incommensurabili*

$$1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : 2 : \sqrt{5} : \sqrt{7} : \sqrt{8} : 3 \ldots .$$

(*Fig.* 35.ª *tav.* 3.ª) . . . . . » 51

XXXVI. *Dato il diametro FQ, e due segmenti in esso CA, CB, alzate dai punti A, B le perpendicolari AH, BD, si domanda sulla BD prolungata un punto G tale, che condotta la retta GH alla periferia sia il rettangolo di GH in HA eguale al rettangolo di FC in BA.* (*Fig.* 36.ª *tav.* 3.ª) » 53

XXXVII. *Sopra una retta qualunque AB costruire un triangolo ACB tale, che condotta in esso la normale CD sieno le rette AB, AC, BC, CD continuamente tra loro proporzionali.* (*Fig.* 37.ª *tav.* 3.ª) . . . . . » 54

XXXVIII. *Dato l'angolo QAN, e dal punto B dato sulla QA innalzata la perpendicolare BD sino ad incontrare in D*

l'altro lato NA, vogliasi determinare sul lato QA un altro punto P, da cui condotta la perpendicolare PM, riesca PM = MD. (*Fig.* 38.ª *tav.* 3.ª) . . . . . pag. 56

XXXIX. *Date le tre perpendicolari abbassate dai vertici di un triangolo sulle basi rispettive trovare il triangolo.* (*Fig.* 39.ª *tav.* 3.ª) . . . . . » 58

XL. *Determinare tutte le dimensioni di un triangolo, supponendo cognita la sua altezza, e cogniti i raggi di due cerchi l'uno inscritto, e l'altro circoscritto al triangolo.* (*Fig.* 40.ª *tav.* 3.ª) . . . . . » 62

XLI. *Dato un angolo, ed un punto condurre da questo punto una retta a segare le due rette costituenti l'angolo, in modo, che risulti un triangolo eguale in area ad un dato rettilineo.* (*Fig.* 41.ª *tav.* 3.ª) . . . . . » 66

XLII. *Dati tre cerchi, e data la loro posizione trovare un cerchio, che sia tangente a tutti i dati cerchi.* (*Fig.* 42.ª *tav.* 3.ª) » 69

XLIII. *Dato il lato di un poligono regolare inscritto in un cerchio, pur dato, trovare il lato d'un poligono simile circoscritto.* (*Fig.* 43.ª *tav.* 3.ª) . . . . . » 74

XLIV. *Trovare il lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio, espresso pel raggio, e quindi il lato del triangolo equilatero circoscritto, e le aree dell'uno, e dell'altro similmente espresse pel raggio.* (*Fig.* 44.ª *tav.* 3.ª) . . . . . » 75

XLV. *Trovare il lato del quadrato inscritto nel cerchio espresso pel raggio, e quindi il lato del quadrato circoscritto; e le aree dell'uno, e dell'altro similmente espresse pel raggio.* (*Fig.* 45.ª *tav.* 3.ª) . . . . . » 77

XLVI. *Trovare il lato del pentagono regolare inscritto nel cerchio espresso pel raggio, e quindi il lato del pentagono circoscritto; e le aree d'entrambi similmente espresse pel raggio.* (*Fig.* 46.ª *tav.* 3.ª) . . . . . » 78

XLVII. *Trovare il lato dell'esagono circoscritto espresso pel raggio; e le aree dell'esagono inscritto, e circoscritto espresso similmente pel raggio* . . . . . » 82

XLVIII. *Trovare il lato dell'ottagono regolare inscritto espresso pel raggio, e quindi anche quello dell'ottagono circoscritto; e le aree d'entrambi similmente espresse pel raggio* . . . . » 84

XLIX. *Trovare il lato del decagono regolare inscritto nel cerchio, espresso pel raggio, e quindi anche quello del circoscritto; e le aree dell' uno, e dell' altro similmente espresse pel raggio.* (*Fig.* 47.ª *tav.* 3.ª) . . . . . pag. 86

L. *Trovare il lato del dodecagono regolare inscritto nel cerchio, espresso pel raggio, e quindi anche il lato del dodecagono circoscritto; e le aree d'entrambi similmente espresse pel raggio* . . . . . » 89

LI. *Trovar una serie di cerchi, che stiano fra loro come la progressione de' numeri naturali.* (*Fig.* 48.ª *tav.* 3.ª) . . . . » 93

LII. *Dati due cerchi trovarne un terzo, che sia eguale alla loro somma; ed un quarto, che sia eguale alla loro differenza.* (*Fig.* 49.ª *tav.* 4.ª) . . . . . » 95

LIII. *Circoscrivere ad un cerchio dato una corona di cerchi eguali di numero* n, *tangenti fra loro, e tangenti al dato.* (*Fig.* 50.ª *tav.* 4.ª) . . . . . » 98

PROBLEMI D' INSCRIZIONE E DI CIRCOSCRIZIONE DI FIGURE REGOLARI AD ALTRE DATE FIGURE REGOLARI

LIV. *Inscrivere un quadrato in un pentagono.* (*Fig.* 51.ª *tav.* 4.ª) » 102

LV. *In un dato quadrato inscrivere un pentagono regolare.* (*Fig.* 52.ª *tav.* 4.ª) . . . . . » 103

LVI. *Inscrivere un triangolo equilatero in un pentagono regolare.* (*Fig.* 53.ª *tav.* 4.ª) . . . . . » ivi

LVII. *Dato il pentageno ABCED si cerca di formare un triangolo equilatero HGF, la cui base sia sul prolungamento della base DE del dato pentagono, ed i cui lati FH, HG passino pei punti A, C dello stesso pentagono.* (*Fig.* 54.ª *tav.* 4.ª) . . . . . » 105

LVIII. *Dato il triangolo equilatero ABC vuolsi inscrivere in esso il pentagono regolare ENDIH in modo, che la sua base poggi sulla base del triangolo, ed i punti E, D tocchino i lati dello stesso triangolo.* (*Fig.* 55.ª *tav.* 4.ª) . . . . . » 107

LIX. *Circoscrivere ad un quadrato un triangolo equilatero per modo, che la base del triangolo sia sul prolungamento della base del quadrato.* (*Fig.* 56.ª *tav.* 4.ª) . . . . . » 112

LX. *In un dato quadrato inscrivere un triangolo equilatero* (*Fig.* 57.ª *tav.* 4.ª) . . . . . pag. 113
LXI. *Dato un triangolo circoscrivervi un quadrato.* (*Fig.* 58.ª *tav.* 4.ª) . . . . . » 115
LXII. *Dato un quadrato circoscrivervi un esagono regolare* (*Fig.* 59.ª *tav.* 4.ª) . . . . . » 121
LXIII. *In un dato quadrato inscrivere un ottagono regolare.* (*Fig.* 60.ª *tav.* 4.ª) . . . . . » 123
LXIV. *Ad un dato triangolo equilatero circoscrivere un pentagono regolare.* (*Fig.* 61.ª *tav.* 4.ª) . . . . . » 125
LXV. *Dato un pentagono regolare circoscrivervi un esagono regolare.* (*Fig.* 62.ª *tav.* 4.ª) . . . . . » 128
LXVI. *In un dato esagono regolare inscrivere un quadrato.* (*Fig.* 63.ª *tav.* 4.ª) . . . . . » 129
LXVII. *In un esagono regolare inscrivere un pentagono regolare.* (*Fig.* 64.ª *tav.* 4.ª) . . . . . » 131

PROBLEMI DIVERSI SUI SOLIDI
E DI APPLICAZIONE AL CALCOLO TRIGONOMETRICO

LXVIII. *Trovare un cilindro, ed un cono, che avendo la stessa altezza, e la stessa base, la superficie del cono sia eguale a quella del cilindro, escluse le basi.* (*Fig.* 65.ª *tav.* 5.ª) » 132
LXIX. *Dato un cono dividerlo per metà con un piano parallelo alla base.* (*Fig.* 66.ª *tav.* 5.ª) . . . . . » 134
LXX. *Data la solidità di un tronco di cono, dato il raggio del cerchio di base, e data l'altezza del tronco, trovare il raggio del cerchio superiore.* (*Fig.* 67.ª *tav.* 5.ª) . . . » 135
LXXI. *Dato un esagono regolare, e sopra di esso eretta una piramide avente per altezza il lato istesso del poligono di base, trovare una sfera, la cui superficie equivalga alla superficie di quella piramide, ed un'altra sfera equivalente in solidità alla solidità della piramide istessa.* (*Fig.* 68.ª *tav.* 5.ª) . . . . . » 136
LXXII. *Si vuol convertire una palla in una tazza emisferica di una data grossezza. Si domanda quale dovrà essere il diametro della superficie interna della tazza.*(*Fig.* 69.ª *tav.* 5.ª) » 138

LXXIII. *Suppongasi, che ABED rappresenti una sfera generata dalla rotazione del semicerchio ABE intorno al diametro AE. Il settore ACB in questa rotazione genererà un settore sferico composto d'un segmento sferico generato dalla rotazione del semi-segmento APB, e d'un cono generato dalla rotazione del triangolo rettangolo BPC. Si domanda in qual luogo il segmento sferico, ed il cono saranno tra loro eguali.* (*Fig.* 70.ª *tav.* 5.ª). . . . . Pag. 141

LXXIV. *Da un dato cilindro tolto un cilindro concentrico si cerca la superficie totale del solido residuo, data la larghezza dello spazio annellare residuo.* (*Fig.* 71.ª *tav.* 5.ª) » 143

LXXV *Dato un tronco di cono trovare la sua superficie convessa, la superficie totale, un cerchio, ed un quadrato equivalenti ciascheduno alla superficie totale.* (*Fig.* 72.ª *tav.* 5.ª) » 146

LXXVI. *Dato il diametro d'una sfera trovare un cubo, la cui superficie sia eguale a quella della sfera* . . . . . » 148

LXXVII. *Dato il raggio d'una sfera costruire un cubo, la cui solidità eguagli quella della sfera* . . . . . » ivi

LXXVIII. *Data una torre se ne vuol conoscere l'altezza.* (*Fig.* 73.ª *tav.* 5.ª) . . . . . » 150

LXXIX. *Dati due punti A, e B posti al di là di un fiume, cui non si possa giugnere pel gonfiamento delle acque, trovare la distanza, che passa fra loro.* (*Fig.* 74.ª *tav.* 5.ª) » 151

LXXX. *Conoscendo la lunghezza della linea BC, e gli angoli B, e C formati dalle rette BA, CA determinare l'altezza AD, cui queste rette s'intersecano.* (*Fig.* 75.ª *tav.* 3.ª) » 154

FINE DEL SECONDO, ED ULTIMO TOMO

CORREZIONI AL TOMO II.°

Pag. 9. Lin. 1. Invece di *sopra indicati*, leggerai: *i due triangoli simili CAE, DBE*

„ 19. „ 23. Invece di *punto L della retta CE*, leggerai: *punto L sulla CE prolungata*

ASSOCIATI

ALLA PRESENTE OPERA

Amici Gio. Battista, *Professore di Matematica*, Modena.

Babbino Gaetano, *Librajo per copie* 8, Torino.

Barbavara Don Luigi, Bologna.

Barbieri Gaetano, *Professore di Matematica*, Mantova.

Bellerio Barone Andrea, *Cav. dell' I. Ord. della Corona Ferrea*, Milano.

Bianchi Giuseppe *q.m* Antonio, *Librajo per copie* 2, Cremona.

Boccolari Andrea, *Ingegnere*, Modena.

Bonomi Luigi, *Studente nell' I. R. Liceo di Milano in P. N.*, Milano.

Braglia Giuseppe, *Librajo-Stampatore per copie* 6, Mantova.

Brandimarte R. P. D. Antonio, *Parroco di S. Salvatore in Onda*, Roma.

Calcagnini d' Este Marchese Tommaso, *Allievo nella Nobile Accademia Ecclesiastica di Roma*, Roma.

Clari Abate Don Serafino, *Professore di Logica e Morale nell' I. R. Liceo di S. Alessandro in Milano*, Milano.

Colli Don Giuseppe, *Convittore nel Collegio Imperiale di Milano*, Milano.

Cossoni Conte Nicola, *Avvocato*, Milano.

Croce Abate Don Francesco, *Vice-Direttore del Collegio Imperiale*, e *Professore di Logica e Morale nell' I. R. Liceo di P. N.*, Milano.

Della Casa Don Gio., *Capitano dell' Imp. Regg. Prohaska*.

Durazzo Marchese Gian-Luca, *Convittore nel Collegio Imperiale di Milano*, Milano.

Farinelli N., *Professore di Matematica Elementare nell' Università di Bologna*, Bologna.

Fontana Sua Eminenza il Cardinale Francesco, *Generale de' Barnabiti in Roma*, Roma.

Fuchs Gio. Giacomo, *Librajo per copie* 6, Venezia.

Gerosa Luigi, *Ingegnere*, Milano.

Gianella Carlo, *Ingegnere in Capo della Regia Delegazione Provinciale di Milano*, Milano.

Gnudi Domenico, *Librajo per copie* 4, Bologna.

Guidetti Conte Francesco, Modena.

Landini N., *Canonico Rettore del Collegio di Educ. in Magenta*, Magenta.

Lapi N., *Dottore e Ripetitore di Calcolo Sublime nell' Università di Bologna*, Bologna.

Manini Fratelli, *Librajo per copie* 10, Cremona.

Mantegazza Abate Don Giuseppe, *già Provinciale de' Barnabiti in Lombardia*, Monza.

Mari Giuseppe, *Studente nell' I. R. Liceo di Milano in P. N.*, Milano.

Medici Francesco, *Ingegnere*, Milano.

Milesi Sua Eccellenza Monsignore Francesco, *Patriarca di Venezia, Grande Dignitario del Regno Lombardo-Veneto*, Venezia.

Moro Gaetano, *Studente nella I. R. Università di Pavia*, Mantova.

Mosconi Conte Abate Giovanni, *Protonotaro Apostolico*, Bergamo.

Noseda Antonio, *Studente nell' I. R. Liceo di Milano in P. N.*, Milano.

Orcesi Gio. Battista, *Librajo per copie* 4, Lodi.

Ostinelli C. A., *Librajo per copie* 2, Como.

Piccolomini Conte Giacomo, *Primicero della Metropolitana di Siena, Allievo nella Nob. Accad. Eccles. di Roma*, Roma.

Romanenghi Giuseppe, *Ingegnere*, Cremona.

Rosselli Abate Don Luigi, *Professore di Filosofia nelle R. Scuole d'Alessandria in Piemonte*, Alessandria.

Rovida Conte Alberico, *R. Segretario della R. Delegazione Provinciale di Milano*, Milano.

Schizzi Conte Folchino, *Reggente del Civico Orfanotrofio di Cremona*, Cremona.

Secco-Suardo Conte Giovanni, Bergamo.

Silva Conte Ercole, Milano.

Susani N., *Studente nell' I. R. Liceo di Mantova*, Mantova.

Taverna Sua Eccellenza il Conte Francesco, *Cav. di 1.ª Classe dell' I. Ordine della Corona Ferrea, Consigliere Intimo di S. M.*, Milano.

Taverna Conte Giuseppe, *Cav. dell' Imp. Ordine della Corona Ferrea*, Milano.

Torre Dionigi, *Convittore nel Collegio Imperiale di Milano*, Milano.

Vaccari Sua Eccellenza il Conte Luigi, *Gran Dignitario della Legion d' Onore di Francia*, Modena.

ALTRI ASSOCIATI

Corbetta Luca, *Stampatore*, Monza.

Erazi Domenico, Roma.

Geminiano Vincenzo e Comp., *Librajo per copie* 4, Modena.

Isimbardi Marchese Alessandro, Milano.

Tensini P. D. Luigi, *Professore di Belle-Lettere in Bologna, per copie* 2, Bologna.

Viglezzi Pietro, Milano.

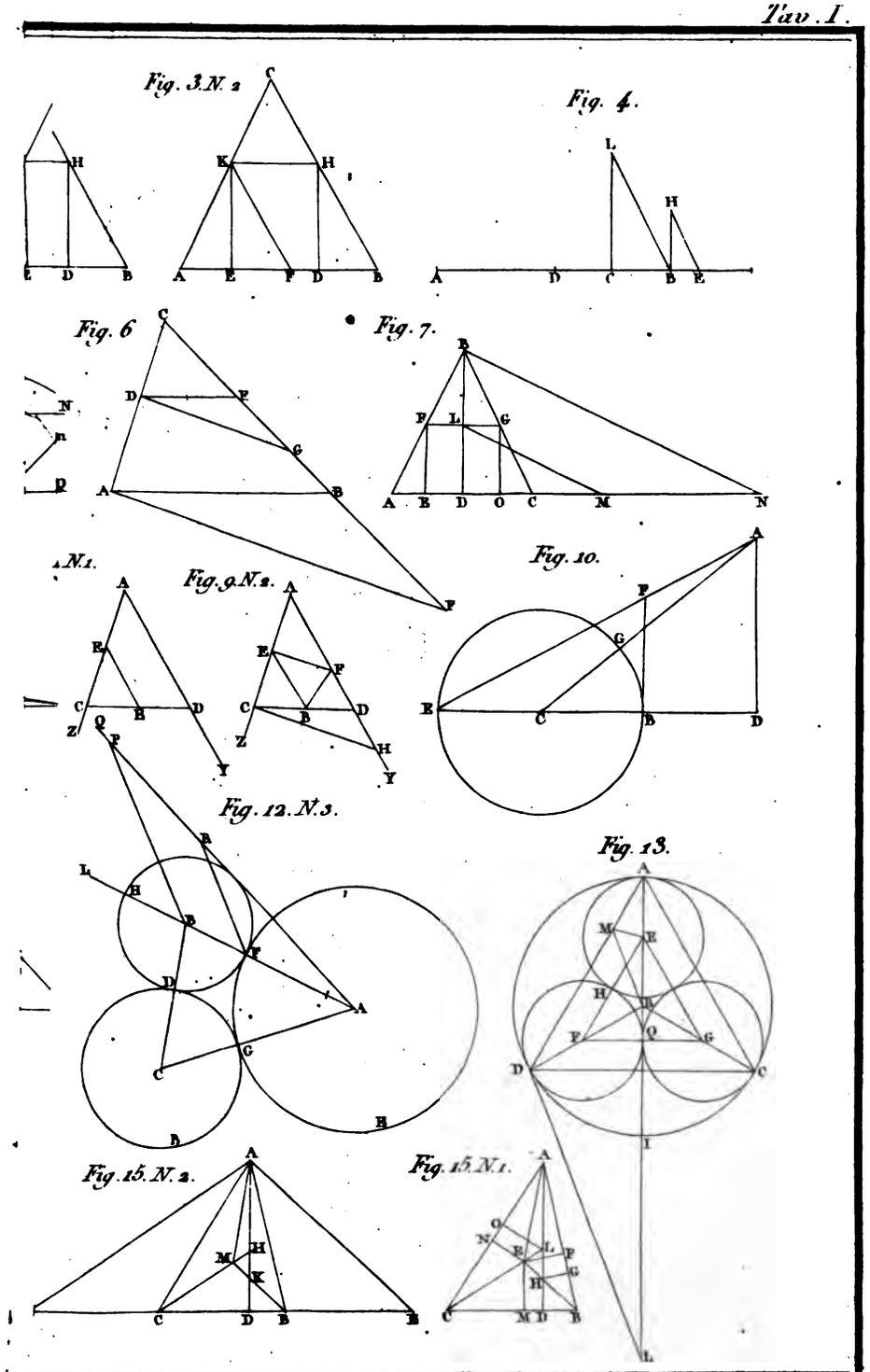


Fig. 3. N. 2
Fig. 4.
Fig. 6
Fig. 7.
Fig. 9. N. 2.
Fig. 10.
Fig. 12. N. 3.
Fig. 13.
Fig. 15. N. 2.
Fig. 15. N. 1.

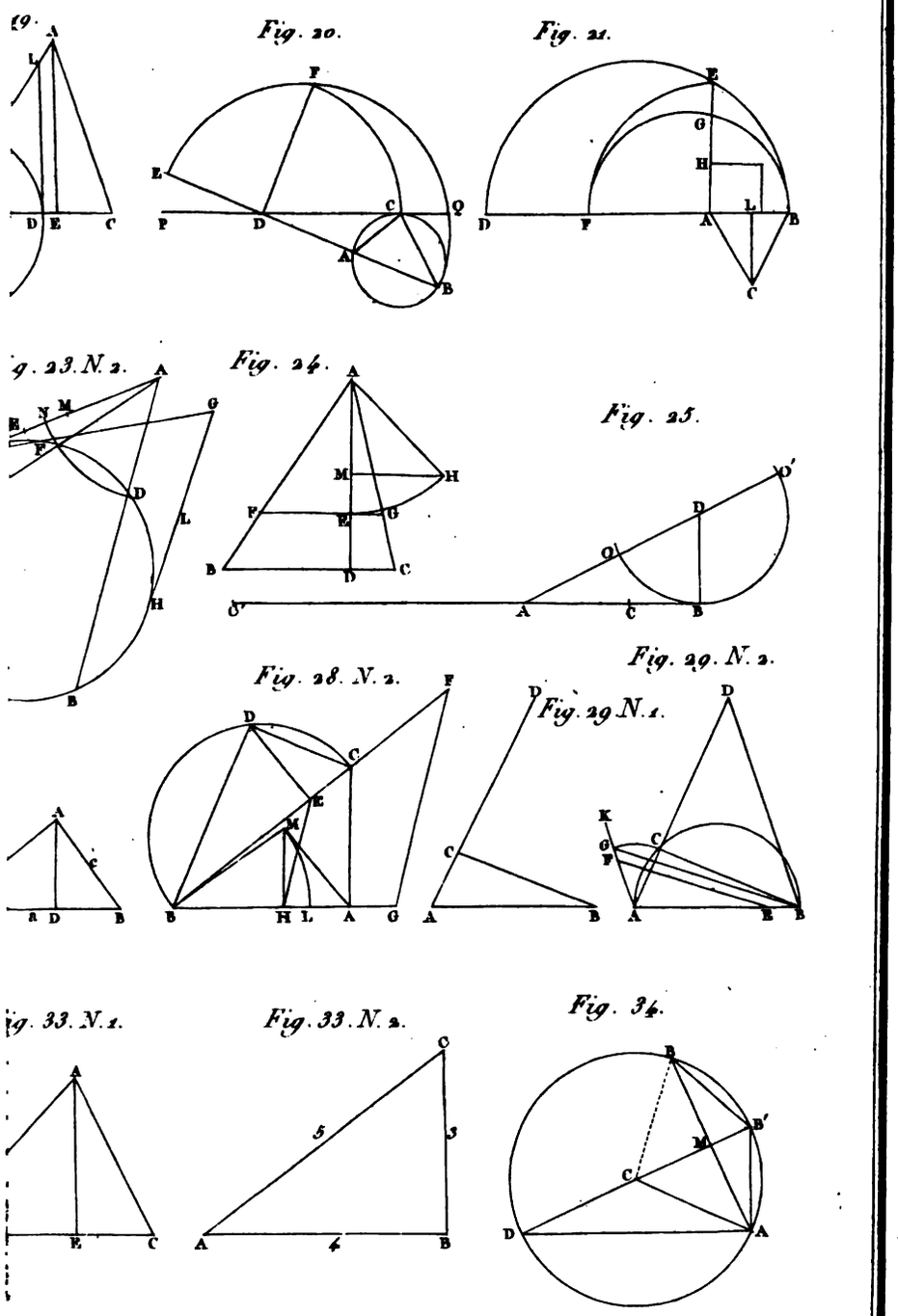

19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 23. N. 2.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 28. N. 2.
Fig. 29. N. 1.
Fig. 29. N. 2.
Fig. 33. N. 1.
Fig. 33. N. 2.
Fig. 34.

Fig. 38. N. 1.

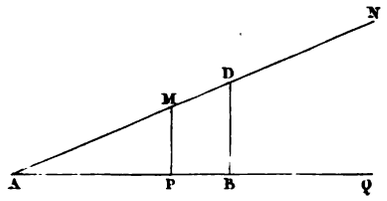


Fig. 38. N. 2.

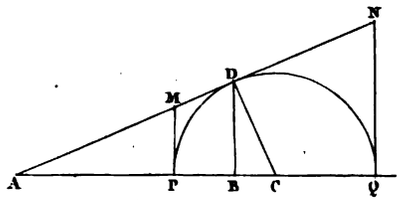
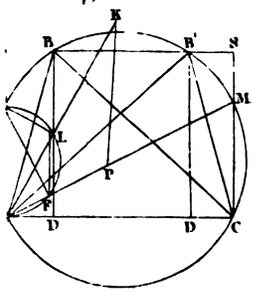


Fig. 40. N. 2.



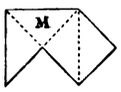
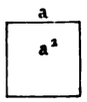


Fig. 41. N. 1.



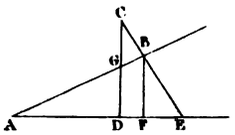


Fig. 42. N. 2.

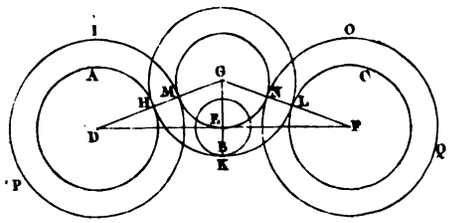


Fig. 43.

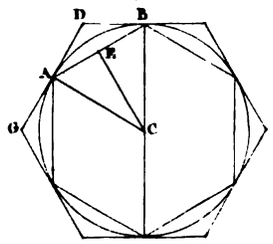


Fig. 46. N. 1.

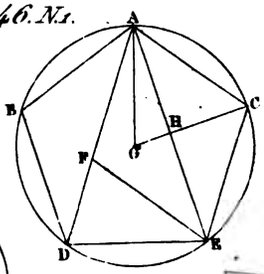


Fig. 47. N. 2.

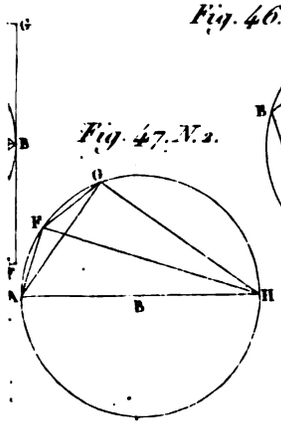


Fig. 48.

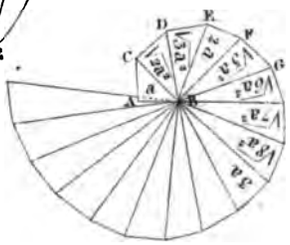


Fig. 51.

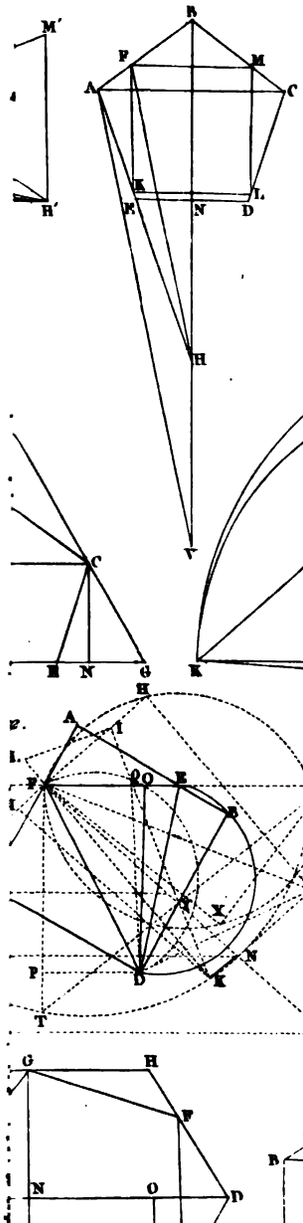


Fig. 52.

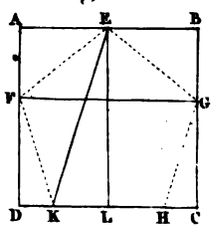


Fig. 53. N. 1.

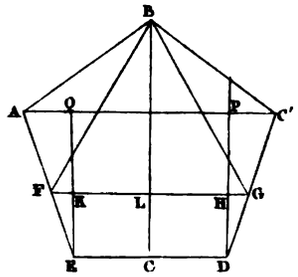
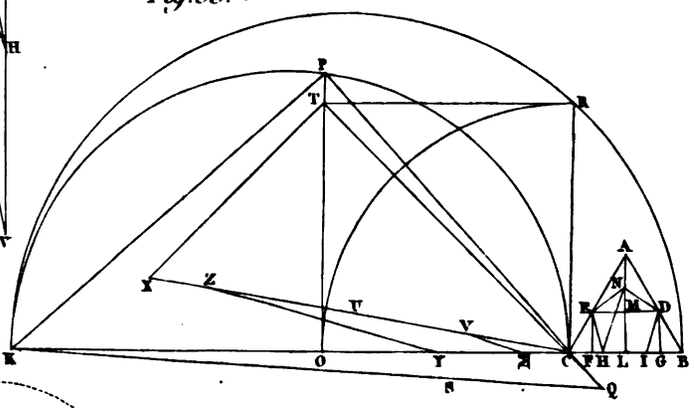


Fig. 55.



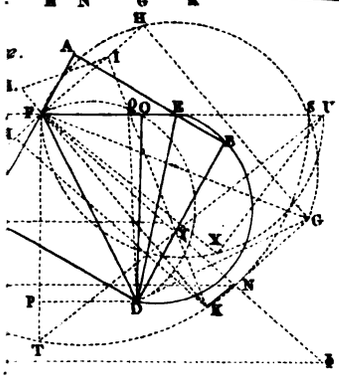


Fig. 59.

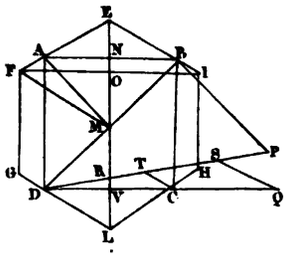


Fig. 60.

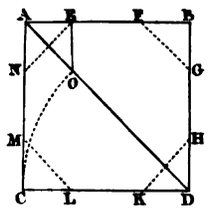
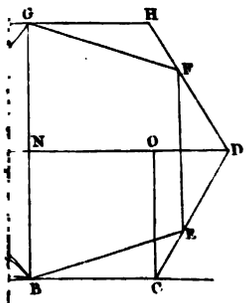


Fig. 63.



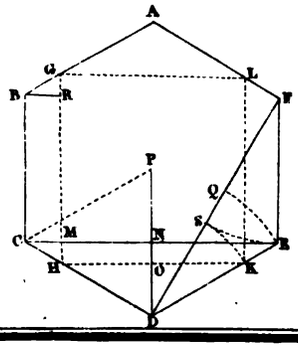


Fig. 64.

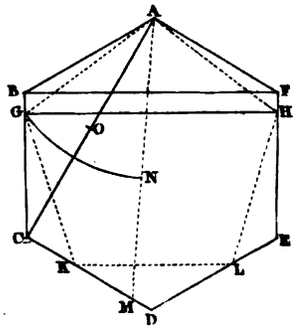


Fig. 67.N.1.

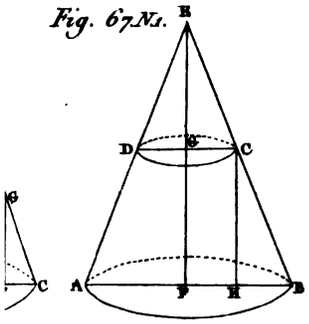


Fig. 67.N.2.

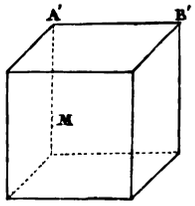


Fig. 68.

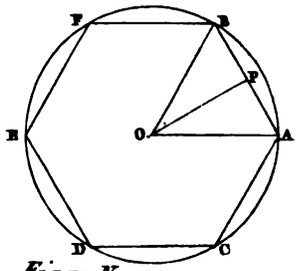


Fig. 70.N.1.

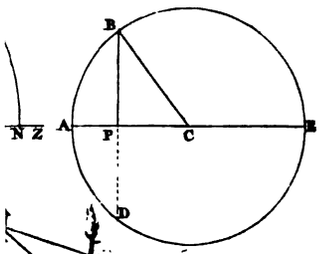


Fig. 70.N.2.

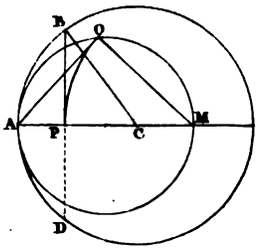
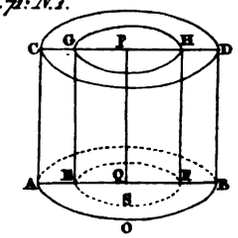


Fig. 71.N.1.



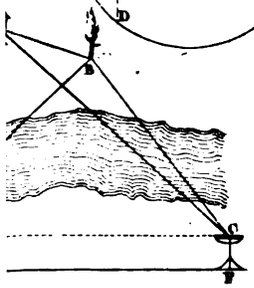


Fig. 75.N.1.

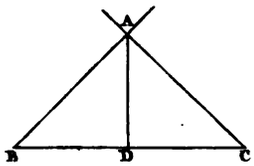
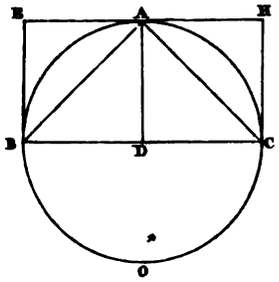


Fig. 75.N.2.



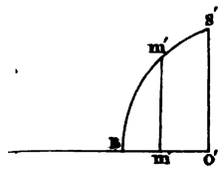
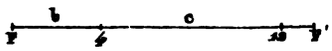



Fig. 77.